ERSTE STAATPRÜFUNG

FÜR DAS LEHRAMT AN SONDERSCHULEN

01.08.2008

AN DER

FAKULTÄT FÜR SONDERPÄDAGOGIK

DER PÄDAGOGISCHEN HOCHSCHULE LUDWIGSBURG

IN VERBINDUNG MIT DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN

MIT SITZ IN REUTLINGEN

WISSENSCHAFTLICHE HAUSARBEIT

THEMA:

Operationsverständnis des Addierens und Subtrahierens bei Förderschülern im 3. Schuljahr: Kindliche Übersetzungen zwischen ikonischer und symbolischer Darstellung von Operationen

THEMA VEREINBART MIT REFERENTIN PROF'in DR. JUTTA SCHÄFER

KOREFERENTIN AR'in BIRGIT SPOHN

BURKHARDT, MONIKA

Inhaltsverzeichnis

Danksagung

Mein Dank gilt

- den 50 Drittklässlern und Drittklässlerinnen für ihre größtenteils hoch motivierte Mitarbeit bei der Untersuchung, ihren neun Lehrerinnen, die mir offen und interessiert ihre Türen geöffnet haben sowie den jeweiligen Schulleitern und Schulleiterinnen, über die der Kontakt zustande kam;
- Frau Prof. Dr. Jutta Schäfer für die wunderbare Zusammenarbeit und engagierte Betreuung;
- Frau AR Birgit Spohn für ihre Bereitschaft, die Arbeit als Zweitprüferin zu lesen und zu bewerten;
- Herrn Thomas Royar von der Pädagogischen Hochschule Freiburg für die hilfreichen Ideen, Anregungen und Hinweise zur Untersuchung;
- Beate, Diana, Bernhard und Georg für das Korrekturlesen der Arbeit;
- Martin für das Binden der Arbeit;
- all denen, die mich während der Entstehungszeit dieser Arbeit begleitet, unterstützt und stets ermutigt haben.

Einleitung

„Im Anfangsunterricht müssen verstärkt Bemühungen einsetzen, *allen* Kindern ein Anknüpfen ihrer individuellen (Vor-)Erfahrungen an die thematisierten Gebiete zu ermöglichen, so dass Möglichkeiten für eine sichere *Begriffsbildung* und den Aufbau *mathematischer Konzepte* bereitgestellt werden. Vor allem sollte von Anfang an Wert auf eine enge Verzahnung von konkreten ‚Welt'-Erfahrungen und Mathematik und auf ein ständiges Hin-und-Her-Übersetzen zwischen den Repräsentationsebenen gelegt werden. Die Schülerinnen und Schüler sollten am Ende des zweiten Schuljahres in der Lage sein, zu Basisaufgaben jeder Standardoperation *Zahlensätze* in Sachsituationen zu übertragen und in modell- oder bildhaften Darstellungen zu visualisieren, *Sachsituationen* in Zahlensätzen zu protokollieren und in Zeichnungs- bzw. Skizzenform darzustellen, *ikonische oder bildhafte Darstellungen* in Zahlensätze und Sachsituationen zu übertragen (…).“ (SCHÄFER 2005, 263; Hervorhebungen im Original)

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Standardoperationen Addition und Subtraktion sowie dem dazugehörigen Operationsverständnis. SCHÄFER[1] fordert, dass die Schüler[2] am Ende des zweiten Schuljahres in der Lage sein sollten, „zu Basisaufgaben jeder Standardoperation (…) *ikonische* (…) *Darstellungen* in Zahlensätze (…) zu übertragen (…)“ (siehe oben). Die durchgeführte Untersuchung befasst sich mit dieser Übersetzungsrichtung – von ikonisch zu symbolisch. Schwerpunktmäßig geht es in der Untersuchung jedoch nicht darum, eine Kategorisierung des Operationsverständnisses der Kinder vorzunehmen[3], sondern vielmehr darum, welche ikonischen Darstellungsformen weniger fehleranfällig sind, welche eindeutiger sind und welche eine größere Vielfalt von Übersetzungen begünstigen. Weiterhin soll herausgefunden werden, nach welchem Verständnis die Darstellungen gedeutet werden und ob es zwischen Jungen und Mädchen bedeutende Unterschiede gibt. Ebenfalls von Interesse sind Unterschiede zwischen den teilnehmenden Schulen, wobei diese nur zu Vermutungen führen können und keine Ursachenanalyse vorgenommen wird.

[1] SCHÄFER 2005, 263; Hervorhebungen im Original

[2] Zur besseren Lesbarkeit wird, wenn nicht anders angegeben, keine Unterscheidung zwischen männlichen und weiblichen Personen vorgenommen; auf die weibliche Form wird daher ohne jegliche Wertung verzichtet.

[3] Dies wäre aufgrund der Untersuchung einer Übersetzungsrichtung auch gar nicht möglich; möglich wäre eine Kategorisierung des Verständnisses auf diese eine Übersetzungsrichtung bezogen, dies steht in der Arbeit jedoch nicht im Mittelpunkt des Interesses und daher wird darauf verzichtet.

Aufbau der Arbeit

Im **ersten Teil (A)** der Arbeit werden theoretische Aspekte näher beleuchtet.

Kapitel 1 beschäftigt sich mit den Operationen Addition und Subtraktion. Vorkenntnisse von Schulanfängern werden beschrieben und es wird auf die Wichtigkeit einer Weiterentwicklung des Verständnisses der Operationen hingewiesen. Die verschiedenen Aspekte der Addition und Subtraktion werden dargelegt und Rechenstrategien sowie Problembereiche aufgegriffen. In **Kapitel 2** werden die verschiedenen Darstellungsformen und der Begriff „Operationsverständnis“ erläutert. Zuerst wird auf die Darstellungsformen nach JEROME S. BRUNER eingegangen, dann wird erklärt, was Operationsverständnis ist. Im Anschluss wird auf die Nicht-Eindeutigkeit graphischer Darstellungen eingegangen. Was der Bildungsplan bezüglich des Operationsverständnisses fordert und welche Kompetenzen die Schüler entwickeln sollen, wird in **Kapitel 3** diskutiert.

Die von mir an sechs Förderschulen durchgeführte Untersuchung wird im **zweiten Teil (B)** vorgestellt und ausgewertet.

In **Kapitel 4** werden der Untersuchungsanlass geschildert und die Forschungsfragen formuliert. Das Untersuchungsverfahren und der Aufbau der Untersuchung werden in **Kapitel 5** beschrieben: die Methode der Untersuchung, die Aufgabengenerierung, die Auswahl und Zusammensetzung der Untersuchungsgruppe sowie das Vorgehen bei der Durchführung. **Kapitel 6** beinhaltet die Forschungshypothesen. In **Kapitel 7** wird das Vorgehen bei der Auswertung der erhobenen Daten erläutert. Die Ergebnisse der Untersuchung werden in **Kapitel 8** dargestellt. Dabei wird die Art der Darstellung und die Fehleranfälligkeit bzw. Eindeutigkeit betrachtet, unterschiedliche Termdeutungen werden analysiert, es wird eine genderspezifische Auswertung vorgenommen und die Ergebnisse der verschiedenen Schulorte werden miteinander verglichen. Aus den Ergebnissen werden Folgerungen abgeleitet, die in **Kapitel 9** geschildert werden. **Kapitel 10** gibt einen Forschungsausblick, im Anschluss folgt in **Kapitel 11** das Schlusswort.

Der abschließende **dritte Teil (C)** enthält die **Verzeichnisse** (Literatur- und Quellenverzeichnis, Abbildungsverzeichnis und Tabellenverzeichnis) und den **Anhang**.

A Theoretischer Teil

„Das Beherrschen der mathematischen Grundoperationen gilt als zentrales Lernziel der Grundschule – auch für Schülerinnen und Schüler mit besonderem Förderbedarf.“ (MOSER OPITZ & SCHMASSMANN 2007, 266)

1. Addition und Subtraktion

1.1 Vorkenntnisse von Schulanfängern

Kinder haben, wenn sie in die Schule kommen, schon zahlreiche, wenn auch individuell sehr unterschiedlich breite und intensive Erfahrungen zu den Begriffen Addition[4] und Subtraktion[5] gesammelt. Werden Schulanfängern Aufgaben in ihnen vertrauten Sachkontexten als Rechengeschichte gestellt, können sie diese lösen, wenn ihnen konkrete Materialien als Hilfe zur Verfügung stehen. Empirische Untersuchungen belegen, dass etwa 90% der Schulanfänger Aufgaben wie „2 + 7", „8 – 5" oder „14 – 8" unter oben genannten Voraussetzungen lösen können. Eine solche Aufgabe könnte zum Beispiel lauten: „Du hast 14 Murmeln. Wenn du mir 8 davon gibst, wie viele hast du dann noch?"[6] Andere Studien verweisen darauf, dass im Schnitt die Hälfte bis zwei Drittel der Schulanfänger die in einem Flipperspielkontext gegebene Aufgabe „3 + 4" richtig löst. Bei der Aufgabe gibt es zur Summenbestimmung keine direkte Abzählmöglichkeit und der Lösungsprozess läuft rein auf der symbolischen Ebene ab.[7]

1.1.1 Informelle Lösungsstrategien von Schulanfängern – Zählstrategien Addition

Zur Lösung der Aufgaben verwenden Schulanfänger fast ausnahmslos Zählstrategien, da sie beim Zählen über große Vorkenntnisse verfügen. Die Kinder verwenden dabei unterschiedliche Zählstrategien, die sich in ihrer Effizienz deutlich voneinander unterscheiden[8]:

[4] wörtlich aus dem Lateinischen: Dazugeben; vgl. GAIDOSCHIK 2007, 70
[5] wörtlich aus dem Lateinischen: Abziehen; vgl. ebd.
[6] vgl. RADATZ, SCHIPPER, DRÖGE & EBELING 1996, 77
[7] vgl. PADBERG 2005, 81
[8] vgl. ebd., 82

1) Vollständiges Abzählen
2) Weiterzählen vom ersten Summanden aus
3) Weiterzählen vom größeren Summanden aus
4) Weiterzählen vom größeren Summanden aus in größeren Schritten

Beim ***vollständigen Abzählen*** handelt es sich um die einfachste Strategie, die vor allem bei der Benutzung von Material eingesetzt wird (z.B. bei Plättchen). Beide Summanden werden nacheinander hingelegt. Die Summe wird durch vollständiges Auszählen bestimmt. Zum Beispiel bei 3 + 4:

1	2	3	1	2	3	4
○	○	○	●	●	●	●
1	2	3	4	5	6	7

Abb. 1.1: Vollständiges Auszählen (nach PADBERG 2005, 82)

Bei dieser Zählstrategie kommt es häufig zu Zählfehlern, vor allem bei größeren Zahlen. Das Ergebnis weicht dabei oft um 1 nach unten bzw. nach oben vom richtigen Ergebnis ab („Verzählen um 1“).

Das ***Weiterzählen vom ersten Summanden*** ist eine Weiterentwicklung der ersten Strategie. So wird bei der Aufgabe 3 + 4 nicht mehr alles gezählt, sondern nur noch 4, 5, 6, 7. Das Ergebnis weicht hier ebenfalls häufiger um 1 nach unten vom richtigen Ergebnis ab, da die Schüler die Kardinalzahl des ersten Summanden mitzählen (3, 4, 5, 6).

Wenn der zweite Summand größer als der erste ist, stellt das ***Weiterzählen vom größeren Summanden aus*** eine Weiterentwicklung gegenüber dem Weiterzählen vom ersten Summanden dar. Diese Strategie stellt eine Vereinfachung dar. Zum Beispiel bei der Aufgabe 2 + 7 muss lediglich noch 8, 9 gezählt werden, nach der zweiten Strategie dagegen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ein solches Vorgehen erlaubt das Kommutativgesetz der Addition[9]. Typischer Fehler ist hier wie bei der davor genannten Strategie ein um 1 zu kleines Ergebnis.

[9] auch Vertauschungsgesetz genannt; a + b = b + a

Die vierte Strategie, das ***Weiterzählen vom größeren Summanden aus in größeren Schritten***, setzt eine sehr hohe Zählkompetenz voraus. Eine Aufgabe wie 9 + 8 kann zum Beispiel in Zweierschritten (11, 13, 15, 17) oder in Viererschritten (13, 17) rascher gelöst werden, als durch achtmaliges Weiterzählen um jeweils 1. Diese Strategie ist, wenn sie beherrscht wird, die effektivste.

Der Fortschritt der Kinder ist kein linearer Weg von der ersten Strategie bis zur vierten Strategie. Sowohl Kinder als auch Erwachsene greifen in bestimmten Situationen auch bei Kenntnis effektiver Zählverfahren auf einfachere Zählstrategien zurück.

1.1.2 Informelle Lösungsstrategien von Schulanfängern – Zählstrategien Subtraktion

PADBERG[10] unterscheidet bei der Lösung kontextgebundener Aufgaben durch Zählstrategien zwei verschiedene Typen von Subtraktionsaufgaben:

1) Subtraktion als Abziehen oder Wegnehmen und
2) Subtraktion als Ergänzen.

„Anna hat 8 Bonbons. Sie gibt ihrer Freundin Sophie 5 Bonbons. Wie viele Bonbons bleiben ihr noch?“ ist ein Beispiel für den ersten Aufgabentyp, der sich auf der symbolischen Ebene durch den Ausdruck 8 – 5 = _ beschreiben lässt. Bei der Lösung wird die Minussprechweise benutzt. Der Sachkontext legt das Abziehen als Rückwärtszählen nahe.

Ein Beispiel für den zweiten Aufgabentyp könnte folgendermaßen lauten: „Sophie hat 5 Bonbons. Wie viele Bonbons muss Sophie bekommen, um insgesamt 8 Bonbons zu haben?“ Symbolisch wird diese Aufgabe als 5 + _ = 8 dargestellt, bei der Lösung wird die Plussprechweise angewandt. In dieser Sachsituation ist das Ergänzen als Vorwärtszählen naheliegend.

[10] vgl. PADBERG 2005, 101

Die Entscheidung für eine Lösung durch Abziehen oder Ergänzen kann auch durch die gegebenen Zahlen beeinflusst werden: Bei 41 – 3 ist das Abziehen sinnvoller, bei 41 – 38 dagegen das Ergänzen.

Weiterhin unterscheidet PADBERG[11] bei den informellen Lösungsstrategien zwischen Zählstrategien mit Materialeinsatz und reinen Zählstrategien.

Zählstrategien mit Materialeinsatz (Beispiel 8 – 5):

- ***Wegnehmen:*** 8 – 5 = _ ; Zuerst werden 8 Elemente (z.B. Plättchen) hingelegt. 5 Elemente werden weggenommen. Die übrigen werden ausgezählt und ergeben die Lösung.

- ***Ergänzen:*** 5 + _ = 8 ; Zuerst werden 5 Elemente hingelegt. Weitere Elemente werden ergänzt, bis insgesamt 8 Elemente daliegen. Die Anzahl der hinzugefügten Elemente liefert die Lösung.

Reine Zählstrategien (Beispiel 8 – 5):

- ***Rückwärtszählen (um eine gegebene Zahl von Schritten):*** 7 (1 weniger), 6 (2 weniger), 5 (3 weniger), 4 (4 weniger), 3 (5 weniger).
  Diese Strategie ähnelt der Strategie Wegnehmen mit Material, stellt aber durch die Loslösung vom Material eine Weiterentwicklung dar. Kinder verwenden hierbei meist ihre Finger zur Hilfe, anstatt „1 weniger" usw. zu zählen. Bei der Strategie ist es erforderlich, gleichzeitig rückwärts (von der gegebenen Zahl ab) und vorwärts (die Anzahl der Schritte) zu zählen. Es kommt häufiger zu einem Verzählen um 1, da die Eckzahlen beide mitgezählt (8, 7, 6, 5, 4) oder beide nicht mitgezählt werden (7, 6, 5, 4, 3, 2).

- ***Rückwärtszählen (bis zu einer gegebenen Zahl):*** 7, 6, 5.
  Die Zahl der Schritte bis zur gegebenen Zahl ergibt das Ergebnis. Hier ist auch ein doppeltes Zählen in entgegengesetzte Richtungen erforderlich. Das Ergebnis weicht daher wie bei der vorherigen Strategie häufiger um 1 nach oben oder unten vom richtigen Ergebnis ab.

[11] vgl. PADBERG 2005, 102ff

- ***Vorwärtszählen:*** 6 (1 mehr), 7 (2 mehr), 8 (3 mehr).
  Die Vorwärtszählstrategie ist eng mit der Ergänzen-Zählstrategie mit Material verwandt und stellt eine Weiterentwicklung derer dar. Häufig nehmen die Kinder auch hier ihre Finger zur Hilfe. Ein Verzählen um 1 tritt hier ebenso wie bei den anderen Strategien häufiger auf.

1.1.3 Nachteile der Zählstrategien bzw. des zählenden Rechnens

Zählen wird heute als wichtige Voraussetzung zum Rechnen lernen betrachtet. Eine Anzahl korrekt zu bestimmen wird erst durch das Zählen ermöglicht.[12] Die oben genannten informellen Lösungsstrategien der Schulanfänger sind jedoch sehr fehleranfällig. Insbesondere bei größeren Zahlen sind Zählstrategien umständlich, sehr aufwändig und nehmen viel Zeit in Anspruch. Aufgaben, die über den Zwanzigerraum hinausgehen, werden sehr komplex. Durch das Benutzen der Finger, zum Beispiel beim doppelten Zählen bei den Rückwärtszählstrategien, sind enge Grenzen gesetzt. Das Arbeitsgedächtnis und die Konzentration werden stark beansprucht. Rechenvorteile und -strukturen werden von den zählenden Rechnern nicht erkannt, sie sehen keine Zusammenhänge zwischen den Aufgaben (z.B. bei 4 + 4 und 4 + 5 oder 3 + 5 und 13 + 5; entsprechend bei der Subtraktion). Dadurch dass ihre Aufmerksamkeit auf das Zählen gerichtet wird, können sie keine Verbindung zwischen der Aufgabe und dem Ergebnis herstellen. Das Verständnis für die Rechenoperation bleibt bei zählenden Rechnern oberflächlich. Die Zahlsymbole und Operationszeichen werden lediglich als Aufforderung für eine Zählhandlung verstanden.[13] MOSER OPITZ und SCHMASSMANN bezeichnen das zählende Rechnen anschaulich als „Sackgassenstrategie“[14].

[12] vgl. MOSER OPITZ 2007, 256
[13] vgl. PADBERG 2005, 84, 104
[14] MOSER OPITZ & SCHMASSMANN 2007, 267

1.2 Erweiterung des Verständnisses der Addition und Subtraktion

Die Vorerfahrungen der Kinder müssen aufgegriffen und erweitert werden. Diese Erweiterung der Vorerfahrungen ist besonders wichtig, da zu den mathematischen Konzepten der Addition und Subtraktion viele unterschiedliche Sachsituationen gehören. Neben dem Hinzukommen bei der Addition und dem Wegnehmen bzw. Weggeben bei der Subtraktion gibt es weitere Aspekte, die zum Begriffsumfang und zum Verständnis der Begriffe Addition und Subtraktion gehören[15] (s. Kap. 1.3).

Der Erweiterung des Verständnisses nachgeordnete Ziele sind die Systematisierung der gewonnenen Kenntnisse, die Übersetzung einer Sachsituation in die formale Gleichungsschreibweise und die steigende Sicherheit beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben in Gleichungsform mit Hilfe heuristischer Strategien und Auswendigwissen.[16]

Die Weiterentwicklung des Vorwissens der Kinder über Dazugeben und Wegtun konkreter Mengen, hin zum rechnerischen Umgang mit abstrakten Zahlen und mathematischen Symbolen, ist für alle Kinder eine Herausforderung. Die Subtraktion erweist sich hierbei als besonders tückisch.[17]

[15] vgl. RADATZ et al. 1996, 77
[16] vgl. ebd.
[17] vgl. GAIDOSCHIK 2007, 71

1.3 Aspekte von Addition und Subtraktion

Bezüglich der syntaktischen Struktur[18] gibt es jeweils drei Typen von Additions- und Subtraktionsaufgaben:

a + b = _	a – b = _
a + _ = b	a – _ = b
_ + a = b	_ – a = b

„a“ und „b“ bezeichnen die gegebenen Zahlen, „ _ “ die gesuchte Zahl.

Während die syntaktische Struktur von Additions- und Subtraktionsaufgaben mit sechs Grundaufgaben sehr übersichtlich ist, ist die semantische Struktur[19] höchst komplex. Eine Gleichung, zum Beispiel „2 + 5 = 7“, kann für sehr viele unterschiedliche Sachsituationen stehen. Mit Hilfe von vier Kriterien können die verschiedenen semantischen Aspekte nach RADATZ et al.[20] beschrieben werden:

1) Dynamik der Situation (dynamisch vs. statisch)
2) Beziehung der Mengen untereinander (Teil-Teil-Ganzes vs. disjunkte Mengen)
3) Richtung der Veränderung (ansteigend vs. abfallend)
4) Gesuchter Wert (Ergebnis oder Veränderung oder Ausgangslage gesucht)

zu 1) Dynamik der Situation (dynamisch vs. statisch):
Bei manchen Sachsituationen besteht eine dynamische Beziehung zwischen den Mengen. Es kommt etwas hinzu oder es wird etwas weggenommen (z.B. zu 3 Kindern kommen 4 weitere dazu, von 5 Keksen werden 3 aufgegessen). Bei statischen Situationen sind zwei Mengen gegeben, deren Summe oder Differenz zu bestimmen ist, ohne dass eine Menge explizit zu der anderen hinzugefügt oder abgetrennt wird (z.B. im Mäppchen sind 3 Buntstifte und 2 Bleistifte; wie viele Stifte sind im Mäppchen?).

[18] von Syntax, dt.: „Zusammenstellung“, Satzlehre; vgl. HOMBERGER 2000, 557
[19] von Semantik, dt.: Bedeutungslehre; vgl. ebd., 474
[20] vgl. RADATZ et al. 1996, 77ff

zu 2) Beziehung der Mengen untereinander (Teil-Teil-Ganzes vs. disjunkte Mengen):

In manchen Sachsituationen sind die beiden gegebenen Mengen Teilmengen einer Gesamtmenge, sie stehen in einer Teil-Teil-Ganzes-Beziehung (z.B. Marc hat 3 lange und 4 kurze Hosen. Wie viele Hosen hat er insgesamt?). In anderen Sachsituationen findet eine Mengenvereinigung nicht statt, die Mengen sind disjunkt zueinander. Die Mengen werden aber miteinander in Verbindung gebracht, beispielsweise im Rahmen eines Mengenvergleichs (z.B. Veronika hat 5 Murmeln, Jens hat 8 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Jens mehr?).

zu 3) Richtung der Veränderung (ansteigend vs. abfallend):

Eine echte Veränderung liegt nur bei dynamischen Situationen vor. Man unterscheidet bei der Richtung der Veränderung zwischen ansteigend (z.B. zu den 3 Kindern kommen 4 dazu) und abfallend (z.B. von 5 Keksen werden 3 aufgegessen). Bezogen auf statische Situationen kann die Berechnung des Unterschieds mit einer Frage nach „mehr“ oder „weniger“ angeregt werden.

zu 4) Gesuchter Wert (Ergebnis oder Veränderung oder Ausgangslage gesucht):

Der syntaktischen Struktur entsprechend sind bei den Situationen drei Grundaufgaben zu unterscheiden, je nachdem, was gesucht wird: Ergebnis (3 + 4 = _), Veränderung (3 + _ = 7) oder Ausgangslage (_ + 4 = 7). Eine Ausnahme stellen Situationen vom Typ „Teil-Teil-Ganzes“ dar. Hier gibt es lediglich zwei Möglichkeiten: gesuchter Wert des Ganzen (3 Bleistifte und 2 Buntstifte; wie viele zusammen?) oder ein Teil wird gesucht (zusammen 5 Stifte, davon 2 Bleistifte; wie viele andere Stifte?).

Tabelle 1.1 gibt einen Überblick über die 20 verschiedenen Sachsituationen zur Addition und Subtraktion, die sich mit Hilfe dieser Kategorien unterscheiden lassen.

<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td colspan="6">Dynamische Situationen</td><td colspan="6" rowspan="3">Statische Situationen</td></tr>
<tr><td colspan="6">Verändern</td></tr>
<tr><td colspan="3">ansteigend</td><td colspan="3">abfallend</td></tr>
<tr><td colspan="3">Dazugeben</td><td colspan="3">Weggeben</td><td colspan="6">Vereinigen (Teil-Teil-Ganzes)</td></tr>
<tr><td>2 Mengen sind Teilmengen einer dritten Menge.</td><td>Ergebnis unbekannt</td><td>Veränderung unbekannt</td><td>Ausgangslage unbekannt</td><td>Ergebnis unbekannt</td><td>Veränderung unbekannt</td><td>Ausgangslage unbekannt</td><td colspan="3">Das Ganze ist unbekannt</td><td colspan="3">Ein Teil ist unbekannt</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Die Mengen sind disjunkt.</td><td colspan="3" rowspan="2">Ausgleichen nach oben</td><td colspan="3" rowspan="2">Ausgleichen nach unten</td><td colspan="6">Vergleichen</td></tr>
<tr><td colspan="3">mehr</td><td colspan="3">weniger</td></tr>
<tr><td>Ergebnis unbekannt</td><td>Veränderung unbekannt</td><td>Ausgangslage unbekannt</td><td>Ergebnis unbekannt</td><td>Veränderung unbekannt</td><td>Ausgangslage unbekannt</td><td>Ergebnis unbekannt</td><td>Veränderung unbekannt</td><td>Ausgangslage unbekannt</td><td>Ergebnis unbekannt</td><td>Veränderung unbekannt</td><td>Ausgangslage unbekannt</td></tr>
</table>

Tab. 1.1: Die semantische Struktur erster Additions- und Subtraktionsaufgaben (nach RADATZ et al., 78)

PADBERG[21] beschreibt die Aspekte der Addition und die Aspekte der Subtraktion getrennt voneinander. Bei der Addition nennt er folgende sechs Sachsituationen, die alle zu der Gleichung $4 + 3 = 7$ passen:

1) Sophie hat 4 Bonbons, Anne hat 3 Bonbons. Wie viele haben sie zusammen?
2) Sophie hat 4 Bonbons. Anne gibt ihr jetzt 3 Bonbons dazu. Wie viele Bonbons hat Sophie danach?

[21] vgl. PADBERG 2005, 85ff, 104ff

3) Sophie hat 4 Bonbons. Anne gibt ihr jetzt einige Bonbons dazu. Danach hat Sophie 7 Bonbons. Wie viele Bonbons hat Anne ihr gegeben?

4) Sophie hat einige Bonbons. Anne gibt ihr jetzt 3 Bonbons dazu. Danach hat Sophie 7 Bonbons. Wie viele Bonbons hatte Sophie ursprünglich?

5) Sophie hat 4 Bonbons. Anne hat 7 Bonbons. Wie viele Bonbons muss Sophie bekommen, um genau so viele Bonbons zu haben wie Anne?

6) Anne hat 7 Bonbons. Sophie hat 3 Bonbons. Wie viele Bonbons hat Anne mehr als Sophie?

Die sechs Fälle lassen sich folgendermaßen unterscheiden:

- In den Beispielen 2), 3), 4) und 5) erfolgt eine Handlung, es ist eine dynamische Situation. Keine Handlung erfolgt in den Beispielen 1) und 6), diese Situationen sind statisch.

- Bei 1) und 2) wird das Ergebnis gesucht, bei 3), 5) und 6) die Veränderung bzw. der Unterschied und bei 4) die Ausgangsgröße.

- Beide Bonbonmengen im Beispiel 1) sind Teilmengen einer Gesamtmenge, die durch Vereinigen gebildet wird. In den Beispielen 5) und 6) haben die beiden Mengen keine gemeinsamen Elemente, sie werden nur in Form eines Ausgleichs bei 5) bzw. eines Vergleichs bei 6) zueinander in Beziehung gebracht.

PADBERG ordnet die verschiedenen Additionssituationen folgenden anschaulichen Bezeichnungen zu:

- Vereinigen (1)
- Verändern (2, 3, 4)
- Ausgleichen (5)
- Vergleichen (6)

Bei den vier Additionssituationen kann man jeweils drei Fälle (vgl. syntaktische Struktur) unterscheiden. Beim Vereinigen sind jedoch nur zwei Fälle interessant ($a + \_ = c$ und $\_ + b = c$ sind nicht wirklich verschieden).

Folgende sechs Sachsituationen nennt PADBERG[22] für die Subtraktionsgleichung 7 – 3 = 4:

1) Anne hat 7 Bonbons. Sie gibt ihrer Freundin 3 Bonbons. Wie viele Bonbons bleiben ihr noch?
2) Anne hat einige Bonbons. Sie gibt hiervon ihrer Freundin 3 Bonbons. Sie behält noch 4 Bonbons übrig. Wie viele Bonbons hatte Anne ursprünglich?
3) Anne hat 7 Bonbons. Sie gibt hiervon ihrer Freundin einige Bonbons. Danach hat sie noch 4 Bonbons. Wie viele Bonbons hat Anne ihrer Freundin gegeben?
4) Anne hat 3 Bonbons. Sie bekommt von ihrer Freundin einige Bonbons. Danach hat sie 7 Bonbons. Wie viele Bonbons hat sie bekommen?
5) Anne hat 7 Bonbons. Ihre Freundin hat 3 Bonbons. Wie viele Bonbons hat die Freundin weniger?
6) Anne hat insgesamt 7 Bonbons, und zwar 3 Karamellbonbons und einige Pfefferminzbonbons. Wie viele Pfefferminzbonbons hat sie?

Wie bei der Addition kann hier zwischen dynamischen (1), 2), 3), 4)) und statischen (5), 6)) Situationen unterschieden werden sowie danach, ob das Ergebnis (1)), die Ausgangsgröße oder eine Teilgröße (2), 6)) oder die Veränderung bzw. der Unterschied (3), 4), 5)) gesucht wird.

Ähnlich wie bei der Addition verwendet PADBERG folgende Bezeichnungen:

- Abziehen (1, 2, 3)
- Ergänzen (4)
- Vergleichen (5)
- Vereinigen (6)

[22] vgl. PADBERG 2005, 104ff

Lediglich beim Abziehen liegt nur das Subtrahieren nahe, während beim Ergänzen (bei der Addition Ausgleichen genannt), Vergleichen und Vereinigen sowohl addiert wie auch subtrahiert werden kann. Der enge Zusammenhang von Addition und Subtraktion wird hier besonders deutlich.

1.4 Rechenstrategien

Jede der oben beschriebenen Aufgabenarten kann anhand von den folgenden drei Rechenstrategien gelöst werden: Zählstrategien, Auswendigwissen und heuristische Strategien. Dabei verwenden Kinder je nach Größe der Zahlen und nach Vertrautheit mit der Sachsituation ihre Strategien, auf die sie schon zurückgreifen können.[23]

1.4.1 Zählstrategien

Unabhängig vom Kulturkreis und unabhängig von einem Schulbesuch sind Zählstrategien die ersten Strategien von Kindern zur Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben. Es ist für sie anfangs die einzige Möglichkeit, Aufgaben zu lösen, da sie die Ergebnisse noch nicht auswendig wissen und noch keine anderen Strategien zur Verfügung haben.[24]

Die verschiedenen Zählstrategien bei der Addition und bei der Subtraktion wurden bereits in Kapitel 1.1.1 und 1.1.2 genauer erläutert.

1.4.2 Auswendigwissen

Beim Auswendigwissen handelt es sich um eine sehr schnelle Strategie für das Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben. Das kleine Einspluseins und Einsminuseins (Zahlenraum bis 20) sollen eingeprägt werden.[25] Der Prozess des

[23] vgl. RADATZ et al.1996, 82f
[24] vgl. ebd., 82
[25] vgl. ebd., 83

mehr oder weniger bewussten Einprägens der Grundaufgaben beginnt schon in der Vorschulzeit und sollte bis zum Beginn der Erarbeitung der schriftlichen Rechenverfahren zur Addition und Subtraktion abgeschlossen sein.[26]

1.4.3 Heuristische Strategien

Heuristische Strategien sind Strategien des flexiblen Umgangs mit Zahlen wie Verdoppeln und Halbieren, Zerlegen und Zusammensetzen sowie gleich- und gegensinniges Verändern.[27] Je nach Aufgabenstellung können die verschiedenen Strategien sehr effektiv angewandt werden. Heuristische Strategien spielen eine wesentliche Rolle über den Zahlenraum 20 hinaus, da hier Zählstrategien und Auswendigwissen keine tragfähigen Strategien mehr darstellen.

1.5 Problembereiche

Grundschulkindern fällt die mündliche Addition von allen vier Grundrechenarten am leichtesten. Trotzdem treten auch hier immer wieder Fehler auf. Die Subtraktion fällt den Kindern deutlich schwerer als die Addition. Gründe hierfür sind nach GRASSMANN[28] Defizite im Rückwärtszählen, nicht ausreichende Verdeutlichung des Zusammenhangs von Addition und Subtraktion durch konkrete Handlungen sowie die Tatsache, dass der Addition im Unterricht mehr Aufmerksamkeit gewidmet wird als der Subtraktion.

[26] vgl. RADATZ & SCHIPPER 1983, 66
[27] vgl. RADATZ et al.1996, 83
[28] vgl. GRASSMANN 1998, 12f

2. Darstellungsformen und Operationsverständnis

2.1 Darstellungsformen nach JEROME S. BRUNER

Die Verwendung verschiedener Darstellungsformen im Mathematikunterricht geht auf JEROME S. BRUNER zurück. In seinen Studien zur kognitiven Entwicklung[29] befassen sich er und seine Mitarbeiter mit der Frage, wie der Mensch die Fähigkeit, Wissen zu erwerben und zu gebrauchen, zunehmend beherrscht.[30]

„Zuerst kennt das Kind seine Umwelt hauptsächlich durch die gewohnheitsmäßigen Handlungen, die es braucht, um sich mit ihr auseinanderzusetzen. Mit der Zeit kommt dazu eine Methode der Darstellung in Bildern, die relativ unabhängig vom Handeln ist. Allmählich kommt dann eine neue und wirksame Methode hinzu, die sowohl Handlung wie Bild in die Sprache übersetzt, woraus sich ein drittes Darstellungssystem ergibt."[31] Dabei hat jede dieser drei Darstellungsmethoden – die handlungsmäßige, die bildhafte und die symbolische – ihre eigene Art, Vorgänge zu repräsentieren.

Während sich die Denkentwicklung nach PIAGET in verschiedenen Stufen (sensomotorische Phase, präoperationale Phase, konkret-operative Phase, formal-operative Phase) entwickelt, vollzieht sie sich nach BRUNER gleichzeitig auf verschiedenen Darstellungsebenen, die in starker Wechselbeziehung zueinander stehen.[32] „Jede [Darstellungsmethode] prägt das geistige Leben des Menschen in verschiedenen Altersstufen, und die Wechselwirkung ihrer Anwendungen bleibt ein Hauptmerkmal des intellektuellen Lebens des Erwachsenen."[33] BRUNER sieht die symbolische Darstellung nicht als die höchste Ebene und die anderen Ebenen nicht als Vorformen der symbolischen Darstellung an. Ein tiefes Verständnis eines Sachverhalts wird erst bei der Verbindung aller Darstellungsebenen erreicht.

---

[29] BRUNER, OLVER & GREENFIELD 1971
[30] vgl. ebd., 21
[31] ebd.
[32] vgl. KLAUDT & WESSOLOWSKI 2004, 5, 15
[33] BRUNER et al.1971, 21

Die Variation der Darstellungsform wird häufig auch „EIS-Prinzip“ genannt.[34] Dabei stehen die Buchstaben für

- enaktiv, d.h. handelnd
- ikonisch, d.h. bildlich
- symbolisch, d.h. verbal oder formal.

Mathematische Sachverhalte sollten möglichst in allen drei Darstellungsebenen erfasst werden. Besonders wichtig ist der Transfer zwischen den drei Repräsentationsmodi, der sogenannte intermodale Transfer.[35]

2.2 Operationsverständnis

„Ein sicheres Operationsverständnis ist eine wesentliche Bedingung für die Entwicklung flexibler Rechenfertigkeiten und angemessener Sachrechenkompetenzen.“ (SCHÄFER 2005, 197)

In Anlehnung an die oben beschriebenen Darstellungsformen beschreiben unter anderem GERSTER & SCHULTZ[36], was Operationsverständnis bedeutet.

Operationsverständnis beim Addieren und Subtrahieren besteht nach GERSTER & SCHULTZ[37] in der Fähigkeit, Verbindungen zwischen folgenden drei Repräsentationsformen[38] herstellen zu können:

- konkrete Sachsituationen / Problemstellungen, meist verbal beschrieben
- modell- oder bildhafte Vorstellungen von Quantitäten (quantitative mathematische Modellierungen)
- symbolische Schreibweisen für die zugrundeliegenden Quantitäten und Rechenoperationen / mathematische Symbolisierungen.

[34] vgl. HAFENBRAK 2004, 22
[35] vgl. ebd.
[36] GERSTER & SCHULTZ 2000
[37] vgl. ebd., 351; SCHÄFER 2006, XII/5
[38] Manche Autoren sprechen von vier Ebenen und fügen dem Modell die „Sprachebene“ hinzu (vgl. hierzu z.B. BÖNIG 1993, 27); im erläuterten Modell mit drei Ebenen wird die Sprache nicht als eigene Repräsentationsform angesehen, sie ist vielmehr in allen Ebenen implizit enthalten.

Jede Darstellungsform kann als eine eigene „Sprache" aufgefasst werden: die Sprache der konkreten Handlung, die Sprache der bild- oder modellhaften Darstellung und die Sprache der symbolischen Darstellung. Ein „Handeln" findet hierbei auf jeder Ebene statt, mit verbalen Sprachzeichen, Gegenständen, Zeichen oder Symbolen. „Ein gut entwickeltes Operationsverständnis schließlich zeigt sich in der Fähigkeit, zwischen diesen ‚Sprachen' hin- und herübersetzen zu können."[39] Sechs verschiedene Übersetzungsrichtungen sind dabei möglich wie folgender Abbildung zu entnehmen ist:

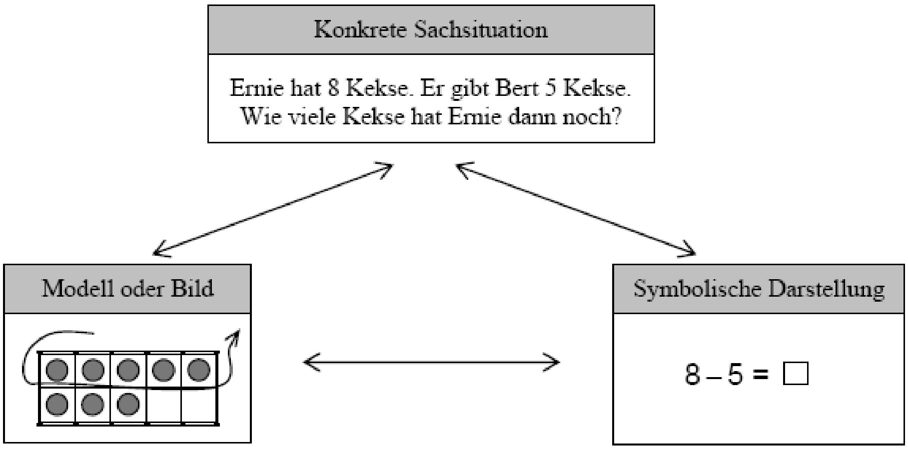


Abb. 2.1: Verschiedene Repräsentationen einer Subtraktionsaufgabe (nach GERSTER & SCHULTZ 2000, 352)

Die Übersetzungen zwischen den verschiedenen Darstellungen sind für Kinder keineswegs so offensichtlich wie dies manchen Erwachsenen erscheint:

„Erwachsenen sind die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Repräsentationen (…) unmittelbar klar. Die Übersetzungen zwischen den verschiedenen Darstellungsformen sind ihnen so geläufig, dass diese ‚automatisch' ablaufen, also meistens nicht mehr bewusst wahrgenommen werden. Daher fällt es ihnen schwer, sich in die beim Kind noch erforderlichen Denkkonstruktionen hineinzuversetzen. Für das Kind ist es ein großer Unterschied, ob eine Aufgabe als konkrete Sachsituation, als bildliche Darstellung oder als mit Symbolen geschriebener Rechenterm vorgelegt wird."[40]

---

[39] SCHÄFER 2006, XII/6
[40] GERSTER & SCHULTZ 2000, 352

Das der jeweiligen Operation zugrunde liegende Konzept haben Kinder erst dann erfasst, wenn sie flexibel von einer in die andere Sprache wechseln können. Dies stellt die Grundlage dar, auf der sie sichere Rechenfertigkeiten entwickeln können.

Weitere Grundlage für ein sicheres Verständnis der Grundrechenarten ist die Einsicht in die Beziehungen der Standardoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) zueinander. Addieren und Subtrahieren sowie Multiplizieren und Dividieren stehen in enger Beziehung zueinander. Neben dem Zusammenhang dieser Operation / Umkehroperation besteht zwischen Addition und Multiplikation sowie Subtraktion und Division ebenfalls eine Beziehung (z.B. Multiplikation als fortgesetzte Addition).

Ein weiterer wesentlicher Bestandteil eines guten Operationsverständnisses besteht darin, Zahlen als gegliederte Quantitäten wahrnehmen und darstellen zu können. Das sogenannte Teile-Ganzes-Konzept wird im folgenden Unterkapitel näher erläutert.

2.2.1 Teile-Ganzes-Konzept

Ein Summenterm, zum Beispiel 5 + 4, ist ein Name für eine Gesamtanzahl (hier: 9), die sich aus zwei Anzahlen (5 und 4) zusammensetzt (siehe Abb. 2.2). Es handelt sich dabei nicht um eine Anweisung zum Weiterzählen.[41]

Das Pluszeichen im Summenterm ist ein Zeichen für die Zusammensetzung eines Ganzen aus Teilen, es ist folglich ein Zeichen für eine Operation. Das Gleichheitszeichen ist das Zeichen für eine Relation im Sinne von größer, kleiner, gleich.[42] Es bedeutet, dass die Mächtigkeit auf beiden Seiten gleich ist.

Für die Summe a + b bedeutet dies:

a: Anzahl eines Teils des Ganzen (1. Summand)

b: Anzahl des anderen Teils des Ganzen (2. Summand)

a + b: Anzahl des Ganzen (Summe)

[41] vgl. GERSTER & SCHULTZ 2000, 357
[42] vgl. ebd., 357f

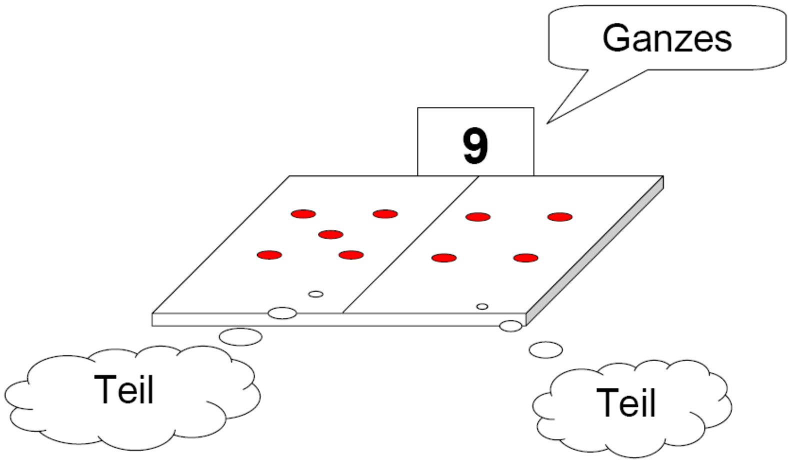


Abb. 2.2: Addieren im Teile-Ganzes-Konzept am Beispiel der Aufgabe 5 + 4 = 9 (nach SCHÄFER 2007, 5)

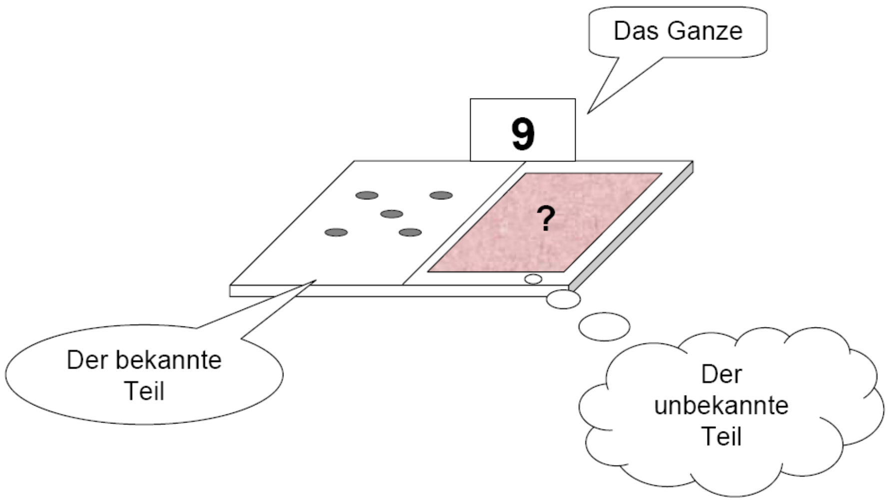


Abb. 2.3: Subtrahieren im Teile-Ganzes-Konzept am Beispiel der Aufgabe 9 – 5 = 4 (nach SCHÄFER 2007, 7)

Beim Subtrahieren ist der Subtrahend (5) ein Teil des Minuenden (9) (siehe Abb. 2.3). Das Minuszeichen ist ein Zeichen dafür, dass die Anzahl eines Ganzen und die Anzahl eines Teils dieses Ganzen bekannt sind. Es handelt sich also nicht um eine Aufforderung zum Wegnehmen oder Rückwärtszählen. Der Minusterm (hier: 9 – 5) bezeichnet den anderen, unbekannten Teil des Ganzen.[43]

[43] vgl. GERSTER & SCHULTZ 2000, 358f

Für die Differenz a – b bedeutet dies[44]:

a: Anzahl des Ganzen (Minuend)

b: Anzahl eines Teils des Ganzen (Subtrahend)

a – b: Anzahl des anderen Teils des Ganzen (Unterschied)

Das Teile-Ganze-Konzept hat mehrere Vorteile[45]:

- Der Summenterm ist ein Name für eine Gesamtanzahl, die sich aus zwei Anzahlen zusammensetzt und nicht nur eine Anweisung, von einer gegebenen Zahl um eine gegebene Anzahl von Schritten weiterzuzählen. Die Differenz bezeichnet eine Zahl, nämlich die Anzahl eines Teils des Ganzen und nicht bloß eine Wegnehmhandlung.
- Das Kind bleibt ohne das Teile-Ganzes-Konzept an der Deutung von Summen und Differenzen als Handlungsanweisungen (Weiterzählen bzw. Wegnehmen oder Rückwärtsgehen auf der Zahlenreihe) hängen. Einleuchtende Zugänge zum vorteilhaften Rechnen sowie die Deutung der Differenz als Unterschied oder als Ergänzen sind dann erschwert.
- Wird die Addition als Zufüghandlung gedeutet, sind nach dem Hinzufügen der Anfangszustand und das Zugefügte nicht mehr erkennbar, nur noch das Ergebnis der Handlung ist sichtbar.
- Da der wegzunehmende Teil bei der Subtraktion im Teile-Ganzes-Konzept nicht entfernt wird, sondern nur ein bisschen zur Seite geschoben oder durch Umdrehen von Wendeplättchen gekennzeichnet wird, kann man gleichzeitig die Gesamtmenge, die wegzunehmende Menge und die Restmenge (Differenzmenge) sehen. Eine reflektierende Abstraktion der Beziehung zwischen den drei beteiligten Zahlen wird dadurch ermöglicht.

[44] vgl. GERSTER & SCHULTZ 2000, 359
[45] vgl. ebd., 357, 359f

- Der Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion wird beim Teile-Ganzes-Konzept besonders deutlich. Eine Situation lässt sich als zwei Additions- und zwei Subtraktionsaufgaben deuten (siehe Abb. 2.4).

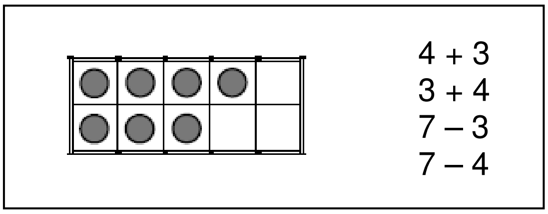


Abb. 2.4: Additions- und Subtraktionsterme (nach GERSTER & SCHULTZ 2000, 359)

- Das Teile-Ganzes-Konzept lässt sich gut mit Hilfe eines Tabletts und einem Schild für die Gesamtzahl modellieren (s. Abb. 2.2 und Abb. 2.3). Bei Subtraktionsaufgaben kann ein Teil mit einem Stück Karton oder einem Tuch zugedeckt werden.

- Das Konzept der Zahlenmauern basiert auch auf dem Teile-Ganzes-Konzept, allerdings schon weitgehend auf der symbolischen Ebene. Der obere Stein stellt die Summe der beiden unteren Steine dar (siehe Abb. 2.5).

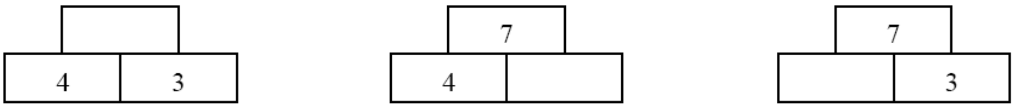


Abb. 2.5: Zahlenmauer als Modell für die Addition und Subtraktion (nach GERSTER & SCHULTZ 2000, 360)

- Das Teile-Ganzes-Konzept ist Grundlage für das Verständnis
  - beim Addieren: die Teile zusammen,
  - beim Subtrahieren: der andere (der fehlende) Teil sowie auch
  - beim Multiplizieren: mehrere gleiche Teile zusammen und
  - beim Dividieren: in gleichgroße Teile zerlegen.

Auf die zentrale Rolle eines Teile-Ganzes-Verständnisses für das Verständnis von Zahlen und mathematisches Problemlösen weist schon LAUREN RESNICK 1983 hin:

„Probably the major conceptual achievement of the early school years is the interpretation of numbers in terms of part and whole relationships. With the application of a Part-Whole schema to quantity, it becomes possible for children to think about numbers as compositions of other numbers. This enrichment of number understanding permits forms of mathematical problem solving and interpretation that are not available to younger children."[46]

2.3 Nicht-Eindeutigkeit graphischer Darstellungen

In Schulbüchern für den Mathematik-Anfangsunterricht finden sich viele Veranschaulichungen. Sie sollen unter anderem dazu dienen, dass den Kindern die Mathematik sinnhafter wird.[47] Es ist jedoch nicht immer gewährleistet, dass Kinder eine Handlung in der Zeichnung wiedererkennen. Erschwert wird dies noch dadurch, dass der Prozesscharakter der Handlung schwer abzubilden ist – das sukzessive Moment geht in ein simultanes über.[48] „Die der Subtraktion zugrundeliegende Handlung ist ein Prozeß, der in einem Bild praktisch nicht adäquat abgebildet werden kann. Wie soll man z.B. gleichzeitig darstellen, daß man zuerst fünf Dinge hat, dann zwei wegnimmt und drei übrig bleiben? In bildlichen Darstellungen wird aus dem zeitlichen Ablauf ein simultanes Nebeneinander."[49] Veranschaulichungen sind keine „selbstredenden" Bilder[50], sie wirken nicht selbsterklärend[51]. Während die Autoren meist in Sachbildern eine eindeutige Rechenaufgabe intendieren, erkennen Kinder in diesen Bildern häufig etwas anderes. Sie deuten die Darstellungen situativ und basierend auf ihrem Vorwissen und ihren Vorerfahrungen.[52] VOIGT kommt in Befragungen von Schülern zu dem Schluss, „dass man statt einem Nicht-Verstehen der Kinder besser von einem Anders-

[46] zit. nach VAN DE WALLE 2007, 129f
[47] vgl. VOIGT 1993, 147
[48] vgl. SCHÜTTE 1994, 56
[49] ebd., 58
[50] vgl. VOIGT 1993, 147
[51] vgl. KRAUTHAUSEN 1998, 41
[52] vgl. SCHÄFER 2006, XII/7

Verstehen sprechen sollte."[53] Beim Vorlegen eines Bildes (vgl. Abb. 2.6) bekam er sehr verschiedene richtige mathematische Aussagen[54]:

- 5 – 2 = 3 (der Wärter gebe zwei Bananen weg)
- 3 + 2 = 5 (Summe der Bananen)
- 1 + 1 = 2 (der Wärter und der Affe)
- 3 – 2 = 1 (der Wärter habe eine Banane mehr als der Affe)
- 5 – 4 = 1 (eine Banane mehr als Hände, die mittlere Banane rutsche dem Wärter gleich zwischen den Händen weg)

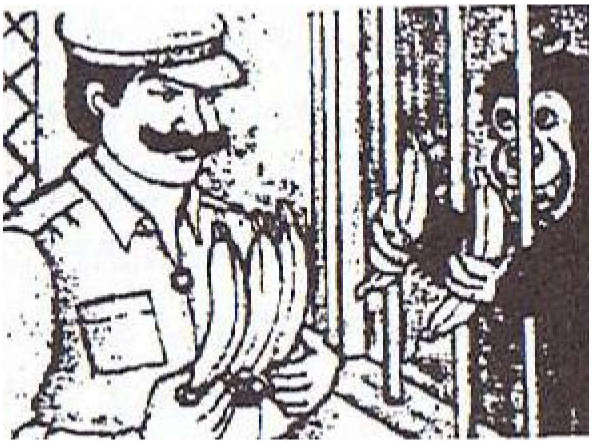


Abb. 2.6: Affe und Wärter (Voigt 1993, 149)

KRAUTHAUSEN & SCHERER plädieren dafür, solche Mehrdeutigkeiten aufrechtzuerhalten, zuzulassen und produktiv für das Lernen zu nutzen.[55] Auch SCHÜTTE fordert, eine Deutungsvielfalt anzustreben[56] und diese im Unterricht zu nutzen: „Die Mehrdeutigkeit von Bildern ist (…) im Prinzip nicht problematisch, wenn man sie bewußt thematisiert. Man könnte ein Bild durchaus zum Anlaß nehmen, Kinder aufzufordern, *verschiedene* Rechensätze daraus abzuleiten und ihre Sichtweise anhand des Bildes zu begründen."[57]

[53] VOIGT 1993, 148
[54] vgl. ebd., 149
[55] vgl. KRAUTHAUSEN & SCHERER 2007, 251
[56] vgl. SCHÜTTE 1994, 63
[57] ebd., 64; Hervorhebungen im Original

Eine Differenzierung zwischen Bildern, die didaktisches Material zeigen und Bildern, die Situationen der Wirklichkeit abbilden, erscheint angebracht.[58] „Die ersteren werden (fast) nur verstanden, wenn sie zuvor erlernt worden sind, die letzteren sind nahezu selbst-verständlich.“[59] Diese Selbstverständlichkeit ist, wie oben gezeigt, jedoch nicht in Bezug auf die Eindeutigkeit der Darstellung gegeben. Dennoch ist anzunehmen, dass es den Kindern einfacher fällt, Darstellungen von Alltagssituationen zu verstehen als Darstellungen mit didaktischem Material.

SÖBBEKE betont, dass die Aussage ‚Anschauungsmittel müssen gelernt werden‘ nicht so verstanden werden darf, „als dass ausschließlich eindeutige Interpretationsweisen festgelegt und dann im Unterricht von den Kindern gelernt und geübt werden müssten. Vielmehr wird eine aktive Auseinandersetzung bedeutsam, in der theoretische Mehrdeutigkeiten bewusst durchleuchtet werden.“[60]

[58] vgl. SCHIPPER & HÜLSHOFF 1984, 56
[59] ebd.
[60] SÖBBEKE 2005, 28

3. Bildungsplan

Der neue Bildungsplan für die Förderschule (Stand 17. Juni 2008)[61] gliedert sich in drei Bereiche auf: „Der besondere Erziehungs- und Bildungsauftrag der Förderschule", „Bildungsbereiche" und „Fächer und Fächerverbünde". Zusätzlich gibt es Beispiele für die Praxis im Internet.[62]

Bildungsbereiche beschreiben zentrale Aspekte der Lebensgestaltung. Sie sollen dazu beitragen, Aktivität und Teilhabe der Schüler in lebensbedeutsamen Situationen zu sichern.[63] Mit den Bildungsbereichen soll somit eine Lebensweltorientierung im Unterricht verbindlich gemacht werden. Leitgedanken erläutern und konkretisieren jeweils die zentralen Aspekte der Lebensbewältigung. Verbindlichkeiten und Fragestellungen in Bezug auf die Schule sowie Kompetenzen und Anhaltspunkte, die die Schüler betreffen, folgen.

Den Fächern und Fächerverbünden sind jeweils Leitgedanken mit fachlichen und didaktischen Aussagen vorangestellt.[64] Gegliedert in Grund- und Hauptstufe werden im Fach Mathematik verschiedene Kompetenzfelder genannt. In den einzelnen Kompetenzfeldern gibt es einerseits Verbindlichkeiten und Fragestellungen (Fokus: Schule) sowie andererseits Kompetenzen und Anhaltspunkte (Fokus: Schüler).[65]

Was der Bildungsplan zum Operationsverständnis für den Unterricht fordert und welche Kompetenzen die Schüler entwickeln sollen, findet sich im Kompetenzfeld „Operationen und Rechenstrategien"[66].

Es werden folgende Verbindlichkeiten für den Unterricht genannt:

- Der Unterricht soll ein tragfähiges Verständnis von mathematischen Operationen durch vielfältige, handlungsorientierte Lernangebote fördern.

[61] Landesinstitut für Schulentwicklung 2008
[62] vgl. Landesinstitut für Schulentwicklung 2007, 14
[63] vgl. ebd., 16
[64] vgl. ebd., 18
[65] vgl. ebd., 211ff
[66] vgl. ebd., 214f

- Bildliche Darstellungen werden im Unterricht als Verbindung zwischen Handlungs- und symbolischer Ebene genutzt.
- Auf die Berücksichtigung der Handlungs-, Bild- und Symbolebene wird im Unterricht Wert gelegt und der Wechsel zwischen den Ebenen wird ermöglicht.
- Der Unterricht regt zum Gespräch über Vorstellungen und Lösungswege an.

Die Schüler sollen in dem so gestalteten Unterricht folgende Kompetenzen erwerben:

- Die Schüler verfügen über Handlungsvorstellungen zu den vier Grundrechenarten.
- Die Schüler können die verschiedenen Darstellungsebenen bei den Operationen in Beziehung setzen.

Konkretisiert werden die Kompetenzen in den Anhaltspunkten. Bezogen auf die Untersuchung ist hier vor allem der Anhaltspunkt „Die Schüler finden Rechenausdrücke zu Handlungen und Bildern“ zu nennen.

Im Bildungsplan finden sich folglich wichtige Hinweise für den Unterricht, um ein Verständnis von mathematischen Operationen aufzubauen. Eine stärkere Betonung des flexiblen Wechsels zwischen den Darstellungsformen wäre jedoch wünschenswert. Das für ein tragfähiges Operationsverständnis wesentliche Teile-Ganzes-Konzept wird im Kompetenzfeld „Operationen und Rechenstrategien“ nicht thematisiert. Im Kompetenzfeld „Zahlvorstellung“[67] wird bei den Kompetenzen aufgeführt, dass die Schüler wissen, dass sich Zahlen aus anderen Zahlen zusammensetzen und sie Zahlen zerlegen können. Diese Kompetenz sollte im Kompetenzfeld „Operationen und Rechenstrategien“ aufgegriffen und im Sinne des Teile-Ganzes-Konzepts erweitert werden.

[67] vgl. Landesinstitut für Schulentwicklung 2008, 212f

Eine solche Verbindlichkeit für den Unterricht könnte folgendermaßen lauten:

- Der Unterricht fördert die Vorstellung von Operationen im Sinne des Teile-Ganzes-Konzepts und wirkt einem Verständnis der Rechenzeichen als Handlungsanweisungen (Weiterzählen bzw. Wegnehmen oder Rückwärtsgehen auf der Zahlenreihe) entgegen.

Entsprechend können Kompetenzen und Anhaltspunkte formuliert werden:

- Die Schülerinnen und Schüler verstehen Summenterme als Name für eine Gesamtzahl, die sich aus zwei Anzahlen zusammensetzt bzw. verstehen Differenzen als Anzahl eines Teils des Ganzen.
    - Die Schülerinnen und Schüler erkennen den engen Zusammenhang von Addition und Subtraktion.
    - Die Schülerinnen und Schüler reflektieren über die Beziehung zwischen den drei beteiligten Zahlen bei der Subtraktion.

Weitere Formulierungen und Akzentuierungen wären möglich.

B Untersuchung

„So ist es kaum übertrieben zu behaupten, dass jedes Material und jede bildliche Darstellung von Zahlbeziehungen einer eigenen Sprache bedarf. Und Übersetzungsleistungen von einer Sprache in eine andere führen unweigerlich zu Fehlern bis hin zu Misskonzeptionen.“ (LORENZ 1998, 26)

4. Untersuchungsanlass

Wie verstehen Kinder ikonische Darstellungen von Operationen? Hierzu gibt es verschiedene Untersuchungen wie zum Beispiel von VOIGT (siehe Kap. 2.3), der auf die verschiedenen Übersetzungsmöglichkeiten eines Bildes hinweist oder von SCHIPPER & HÜLSHOFF[68], die unterschiedliche Veranschaulichungen (modell- und bildhafte Darstellungen) aus verschiedenen Mathematikbüchern untersucht haben.

In meiner Untersuchung soll es um Übersetzungen von modellhaften Darstellungen in symbolische Zahlensätze gehen, wobei alle Aufgaben mit dem gleichen didaktischen Material gelegt werden. Während die ikonische Ebene im engeren Sinne keine Manipulation an der Darstellung zulässt, wird diese hier bei dynamisch präsentierten Darstellungen vorgenommen. Dies ist dadurch zu rechtfertigen, dass die Manipulation nicht durch die Kinder geschieht, sondern durch den Versuchsleiter. Die Ergebnisse der Untersuchung sollen Hinweise darauf geben, wie die Art der so präsentierten Darstellung die Übersetzungsleistungen der Kinder beeinflusst.

Die Übersetzung von der ikonischen zur symbolischen Darstellung ist eine der sechs Übersetzungsrichtungen (vgl. Kap. 2.2), zwischen denen bei einem gut entwickelten Operationsverständnis flexibel hin- und herübersetzt werden kann. Untersuchungsergebnisse zur Übersetzung von der symbolischen Darstellung zu konkreten Sachsituationen und zum Modell oder Bild liegen bereits vor.[69]

[68] vgl. SCHIPPER & HÜLSHOFF 1984
[69] vgl. SCHÄFER 2005

Forschungsfragen

- Wie übersetzen Kinder die in starkem Maße didaktisch vorstrukturierten Darstellungen in die formale Schreibweise?
- Hat die Art der mit den Materialien durchgeführten Darstellung (z.B. statisch versus dynamisch; farbliche und räumliche Unterschiede) Auswirkungen auf die Übersetzung?
- Gibt es typische Übersetzungs“fehler“?

Die Fragen beziehen sich jeweils auf Operationen zu den Grundrechenarten Addition und Subtraktion.

5. Untersuchungsverfahren – Aufbau der Untersuchung

5.1 Methode der Untersuchung

Die Untersuchung wird an Drittklässlern aus verschiedenen Förderschulen durchgeführt. Drittklässler wurden gewählt, da die Grundrechenarten Addition und Subtraktion schon behandelt wurden und die Kinder sich nicht mehr unmittelbar in der Entwicklung von Operationsvorstellungen befinden.

Als didaktisches Material werden bei der Untersuchung farbige Plättchen aus Plastik benutzt. Diese durchsichtigen Plättchen werden mit Hilfe eines Overheadprojektors an die Wand projiziert, wo sie als farbige Schatten gut sichtbar sind.

Die Untersuchung findet im Klassenverband statt und dauert zwischen 30 und 45 Minuten. Die einleitenden Sätze sowie die Darstellungen der zu präsentierenden Aufgaben werden genau beschrieben, um möglichst einheitliche Bedingungen in den unterschiedlichen Klassen zu erreichen. Zur Notation ihrer Rechenausdrücke bekommen die Kinder Blätter. Darauf schreiben sie anfangs ihren Namen sowie ihre Klasse.

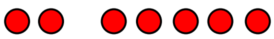
5.2 Aufgabengenerierung

Bei der Erstellung der Aufgaben habe ich mich an mündlichen Vorschlägen von Herrn Thomas Royar orientiert. Er führte bereits Aufgaben zur Multiplikation mit Schülern durch.

Die Aufgabendarstellungen sollen sich in verschiedenen Bereichen unterscheiden:

- Aufbau (dynamisch vs. statisch vs. Abfolge verschiedener „Bilder“; sichtbares Endergebnis vs. nicht sichtbares Endergebnis; Subtrahend bleibt sichtbar vs. Subtrahend bleibt nicht sichtbar)
- Farbgebung (einfarbig vs. zweifarbig)

- Räumliche Anordnung (Blockanordnung vs. lineare Anordnung; räumlich versetzt vs. nicht räumlich versetzt)
- Aufgabe (größerer Summand an erster Stelle vs. kleinerer Summand an erster Stelle; gleiche Summanden vs. unterschiedliche Summanden)

Weitere Unterscheidungen wären möglich gewesen. Beispielsweise die Verwendung eines Zehnerfeldes als Strukturierungshilfe. Eine weitere Differenzierung wäre bei den statisch präsentierten Subtraktionsaufgaben möglich gewesen: die Anzahl der Plättchen auf der linken ist geringer als die Anzahl der Plättchen auf rechten Seite (z.B.  - nach dem Verständnis des Teile-Ganzes-Modells die Aufgabe 7 – 5 bzw. 7 – 2; auch interpretierbar als 5 – 2 = 3: 5 ist 3 mehr als 2). Da ich mich jedoch auf zwölf Aufgaben pro Operation beschränken wollte, wurden diese Formen nicht berücksichtigt.

Die Aufgaben berücksichtigen verschiedene Aspekte der Addition bzw. Subtraktion, je nachdem, wie sie interpretiert werden. Da jede Aufgabe verschiedene Interpretationen zulässt, wird an dieser Stelle nicht darauf eingegangen, welche Aspekte den Aufgaben zugeordnet werden können.

Im Folgenden wird jede Aufgabe vorgestellt und anschließend angegeben, welchen Darstellungsformen sie zuzuordnen ist. Dabei werden folgende Abkürzungen[70] verwendet:

Ab_d	Aufbau: dynamisch
Ab_AvB	Aufbau: Abfolge verschiedener „Bilder“
Ab_s	Aufbau: statisch
Ab_sE	Aufbau: sichtbares Endergebnis (Addition)
Ab_osE	Aufbau: ohne sichtbares Endergebnis (Addition)
Ab_Ss	Aufbau: Subtrahend sichtbar (Subtraktion)
Ab_Sns	Aufbau: Subtrahend nicht sichtbar (Subtraktion)

[70] Die Abkürzung bestehen jeweils aus zwei Buchstaben des Bereichs, dem sie zugeordnet werden (z.B. Ab für **A**uf**b**au), einem Unterstrich und dem oder den Anfangsbuchstaben der Spezifizierung innerhalb des Bereichs (z.B. d für **d**ynamisch).

Fg_e	Farbgebung: einfarbig
Fg_z	Farbgebung: zweifarbig
rA_B	räumliche Anordnung: Blockanordnung
rA_lA	räumliche Anordnung: lineare Anordnung
rA_rv	räumliche Anordnung: räumlich versetzt
rA_rnv	räumliche Anordnung: räumlich nicht versetzt
Ag_grS	Aufgabe: größerer Summand an 1. Stelle (Addition)
Ag_kS	Aufgabe: kleinerer Summand an 1. Stelle (Addition)
Ag_uS	Aufgabe: unterschiedliche Summanden (Addition)
Ag_glS	Aufgabe: gleiche Summanden (Addition)

5.2.1 Additionsaufgaben

Aufgabe 1a: Es werden zuerst drei gelbe und dann fünf blaue, räumlich etwas versetzte Plättchen gelegt (Objekt für Objekt einzeln)

Ab_d, Ab_sE, Fg_z, rA_B, rA_rv, Ag_grS, Ag_uS

Aufgabe 2a: Es werden zuerst sechs rote und dann vier rote, räumlich etwas versetzte Plättchen gelegt (Objekt für Objekt einzeln)

Ab_d, Ab_sE, Fg_e, rA_B, rA_rv, Ag_grS, Ag_uS

Aufgabe 3a: Es werden zuerst vier grüne und dann ein blaues, räumlich nicht versetztes Plättchen gelegt (Objekt für Objekt einzeln)

Ab_d, Ab_sE, Fg_z, rA_lA, rA_rnv, Ag_grS, Ag_uS

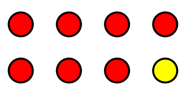
Aufgabe 4a: Beim Einschalten sind zwei grüne und vier gelbe Plättchen sichtbar, räumlich etwas versetzt

Ab_s, Ab_sE, Fg_z, rA_lA, rA_rv, Ag_kS, Ag_uS

Aufgabe 5a: Beim Einschalten sind fünf blaue und vier blaue Plättchen sichtbar, räumlich etwas versetzt

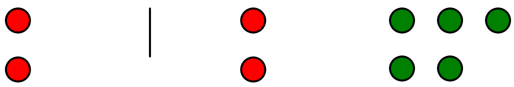
Ab_s, Ab_sE, Fg_e, rA_B, rA_rv, Ag_grS, Ag_uS

Aufgabe 6a: Beim Einschalten sind sieben rote und ein gelbes Plättchen sichtbar, räumlich nicht versetzt



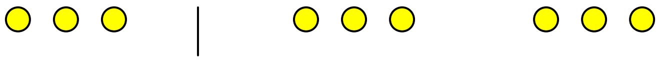
Ab_s, Ab_sE, Fg_z, rA_B, rA_rnv, Ag_grS, Ag_uS

Aufgabe 7a: OHP ein: zwei rote Plättchen; OHP aus; OHP ein: zwei rote und fünf grüne Plättchen sind sichtbar, räumlich etwas versetzt



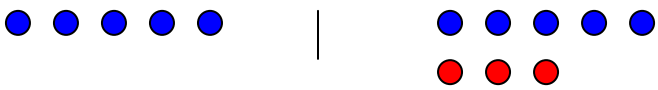
Ab_AvB, Ab_sE, Fg_z, rA_B, rA_lA, Ag_kS, Ag_uS

Aufgabe 8a: OHP ein: drei gelbe Plättchen; OHP aus; OHP ein: drei gelbe und drei gelbe Plättchen sind sichtbar, räumlich etwas versetzt



Ab_AvB, Ab_sE, Fg_e, rA_lA, rA_rv, Ag_glS

Aufgabe 9a: OHP ein: fünf blaue Plättchen; OHP aus; OHP ein: fünf blaue und drei rote Plättchen sind sichtbar, räumlich nicht versetzt

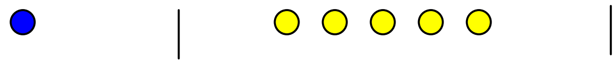


Ab_AvB, Ab_sE, Fg_z, rA_B, rA_rnv, Ag_grS, Ag_uS

Aufgabe 10a: OHP ein: vier grüne Plättchen; OHP aus; OHP ein: drei rote Plättchen; OHP aus

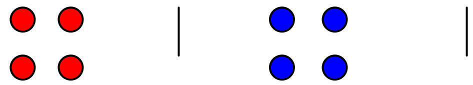
Ab_AvB, Ab_osE, Fg_z, rA_B, Ag_grS, Ag_uS

Aufgabe 11a: OHP ein: ein blaues Plättchen; OHP aus; OHP ein: fünf gelbe Plättchen; OHP aus



Ab_AvB, Ab_osE, Fg_z, rA_IA, Ag_kS, Ag_uS

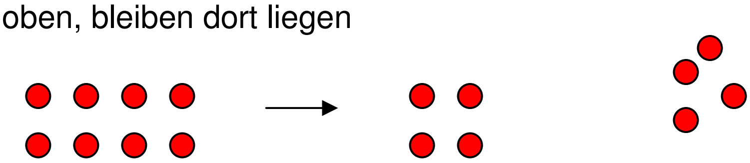
Aufgabe 12a: OHP ein: vier rote Plättchen; OHP aus; OHP ein: vier blaue Plättchen; OHP aus



Ab_AvB, Ab_osE, Fg_z, rA_B, Ag_glS

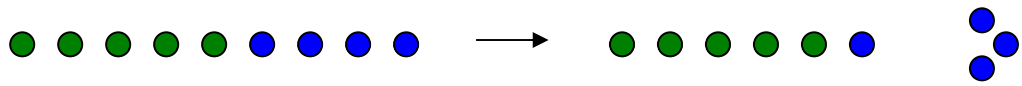
5.2.2 Subtraktionsaufgaben

Aufgabe 1s: Acht rote Plättchen liegen auf OHP; vier davon werden zur Seite geschoben, bleiben dort liegen



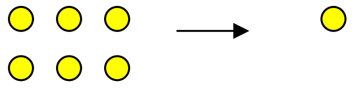
Ab_d, Ab_Ss, Fg_e, rA_B

Aufgabe 2s: Fünf grüne und vier blaue Plättchen liegen auf OHP; drei blaue Plättchen werden zur Seite geschoben, bleiben dort liegen



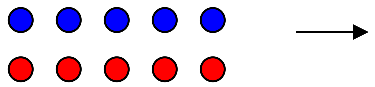
Ab_d, Ab_Ss, Fg_z, rA_IA

Aufgabe 3s: Sechs gelbe Plättchen liegen auf OHP; fünf davon werden weggenommen



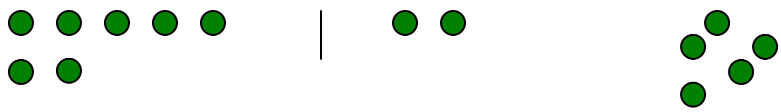
Ab_d, Ab_Sns, Fg_e, rA_B

Aufgabe 4s: Fünf blaue und fünf rote Plättchen liegen auf OHP; sieben Plättchen werden weggenommen



Ab_d, Ab_Sns, Fg_z, rA_B

Aufgabe 5s: OHP ein: sieben grüne Plättchen; OHP aus; OHP ein: zwei grüne, fünf grüne am Rand

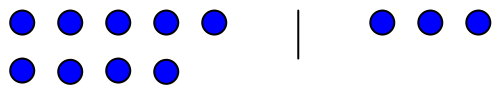


Ab_AvB, Ab_Ss, Fg_e, rA_B

Aufgabe 6s: OHP ein: fünf gelbe und drei rote Plättchen; OHP aus; OHP ein: ein gelbes, vier gelbe und drei rote am Rand

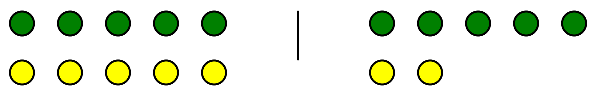
Ab_AvB, Ab_Ss, Fg_z, rA_IA

Aufgabe 7s: OHP ein: neun blaue Plättchen; OHP aus; OHP ein: drei blaue Plättchen



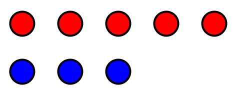
Ab_AvB, Ab_Sns, Fg_e, rA_B

Aufgabe 8s: OHP ein: fünf grüne und fünf gelbe Plättchen; OHP aus; OHP ein: fünf grüne und zwei gelbe Plättchen



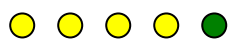
Ab_AvB, Ab_Sns, Fg_z, rA_B

Aufgabe 9s: Beim Einschalten sind fünf rote Plättchen und darunter drei blaue Plättchen sichtbar, räumlich nicht versetzt



Ab_s, Ab_Ss, Fg_z, rA_B, rA_rnv

Aufgabe 10s: Beim Einschalten sind vier gelbe Plättchen und daneben ein grünes Plättchen sichtbar, räumlich nicht versetzt

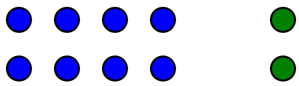


Ab_s, Ab_Ss, Fg_,z rA_lA, rA_rnv

Aufgabe 11s: Beim Einschalten sind vier rote Plättchen und räumlich etwas versetzt drei rote Plättchen sichtbar

Ab_s, Ab_Ss, Fg_e, rA_lA, rA_rv

Aufgabe 12s: Beim Einschalten sind acht blaue Plättchen und räumlich etwas versetzt zwei grüne Plättchen sichtbar



Ab_s, Ab_Ss, Fg_z, rA_B, rA_rv

5.3 Auswahl und Zusammensetzung der Untersuchungsgruppe

Für die Untersuchung wurden Förderschulen im Landkreis R. und im Umkreis von H. per E-Mail angeschrieben und angerufen. Sechs Schulen erklärten sich bereit und ermöglichten mir, meine Untersuchung mit ihren Drittklässlern durchzuführen. An einer Schule war es organisatorisch nicht möglich, alle Drittklässler zu untersuchen, an einer anderen Schule fehlten drei Schüler an dem Tag der Untersuchung. Da manche Schulen jahrgangsübergreifende Klassen haben, wurden diese, sofern dies möglich war, für die Untersuchung so aufgeteilt, dass nur Drittklässler mitgemacht haben.

Die Schüler verteilen sich folgendermaßen auf die sechs Schulen:

Schule	Anzahl Schüler	Anteil der Schüler an Gesamtstichprobe
1	10	20%
2	12	24%
3	11	22%
4	1	2%
5	9	18%
6	7	14%

Tab. 5.1: Zusammensetzung der Untersuchungsgruppe

Der Anteil der Mädchen liegt bei 40%. Das entspricht laut statistischem Landesamt Baden-Württemberg[71] etwa dem durchschnittlichen Anteil von Mädchen in Förderschulen.

Auf die Erhebung weiterer Merkmale wie Lebensalter oder Migratioshintergrund wurde verzichtet.

5.4 Vorgehen bei der Untersuchung

In allen Klassen habe ich mich anfangs kurz vorgestellt. Da wir in manchen Klassen noch auf einzelne Schüler warten mussten, haben wir dort eine kurze Vorstellungsrunde in der Klasse gemacht. Nachdem alle Schüler angekommen waren, habe ich in jeder Klasse zur Einleitung das gleiche gesagt:

„Ich mache heute ein paar Aufgaben mit euch. Es geht dabei nicht um richtig oder falsch, sondern mich interessiert, wie ihr die Aufgaben versteht.

Schreibt zu dem, was ich euch gleich zeige, eine Plusaufgabe mit Ergebnis auf, von der ihr denkt, dass sie am besten zu dem passt, was ihr seht.

Zum Beispiel: 7 + 2 = 9 “ (*Aufgabe wird an Tafel geschrieben, danach verdeckt*)

---

[71] vgl. Statistisches Landesamt Baden-Württemberg 2007, 1; Im Schuljahr 2006/07 betrug der Anteil von Mädchen in öffentlichen Förderschulen ca. 41,3%.

Zur Notation ihrer Ergebnisse habe ich den Schülern Zettel ausgeteilt, auf denen die Aufgabennummern vorgedruckt waren (siehe Anhang B).

Mit dem Hinweis darauf, dass es nicht um „richtig“ oder „falsch“ geht, sollte Druck von den Schülern genommen werden. Dadurch sowie durch die Tatsache, dass die den Schülern vertraute Lehrerin mit im Zimmer war, entstand meinem Eindruck nach in allen Klassen eine gute, angstfreie Arbeitsatmosphäre.

Als Beispiel habe ich lediglich eine symbolische Gleichung gesagt und an die Tafel geschrieben. Ich habe mich bewusst dagegen entschieden, eine Aufgabe ikonisch zu präsentieren und dazu eine symbolische Darstellung anzugeben, um die Schüler in ihren Übersetzungen nicht zu beeinflussen. Die angeschriebene Gleichung wurde nach kurzer Zeit wieder verdeckt, damit die Schüler davon nicht abgelenkt werden oder sie zum Lösen ähnlicher Aufgaben verwenden.

Jede Aufgabe wurde mit „Aufgabe n“ eingeleitet und nachdem alles gelegt bzw. gezeigt wurde, mit „Fertig“ beendet.

Nach den zwölf Additionsaufgaben habe ich die Zettel wieder eingesammelt. Eine ursprünglich eingeplante Pause war nicht nötig, die Schüler wollten gleich weitermachen. Bei den Subtraktionsaufgaben bin ich gleich vorgegangen wie zuvor bei den Additionsaufgaben:

„Schreibt zu dem, was ich euch gleich zeige, eine Minusaufgabe mit Ergebnis auf, von der ihr denkt, dass sie am besten zu dem passt, was ihr seht.

Zum Beispiel: 5 – 3 = 2 “ (*Aufgabe wird an Tafel geschrieben, danach verdeckt*)

6. Forschungshypothesen

6.1 Grundannahme – Ausgangsthese

Die Kinder übersetzen die Darstellungen in formale Schreibweisen, wobei es sowohl zu unterschiedlichen sinnvollen als auch zu fehlerhaften Übersetzungen kommt. Dabei gehe ich davon aus, dass die Art der Darstellung Auswirkungen auf die Übersetzung haben wird.

6.2 Hypothesen – Unterthesen

$H1_{as}$[72]: Aufgaben zur Addition sind weniger fehleranfällig als Aufgaben zur Subtraktion.

zu Additionsaufgaben:

Aufbau

$H2_a$: Dynamische Darstellungen sind weniger fehleranfällig als statische Darstellungen und weniger fehleranfällig als die Abfolge verschiedener „Bilder“.

$H3_a$: Darstellungen mit sichtbarem Endergebnis sind weniger fehleranfällig als Darstellungen ohne sichtbares Endergebnis.

Farbgebung

$H4_a$: Einfarbige Darstellungen sind weniger fehleranfällig als zweifarbige Darstellungen.

Räumliche Anordnung

$H5_a$: Die Darstellung über die Anordnung als Block ist weniger fehleranfällig als die Darstellung über die lineare Anordnung.

[72] Die Hypothesen sind von oben nach unten durchnummeriert; zur einfacheren Lesbarkeit ist nach der Zahl jeweils ein „a“ für Addition, ein „s“ für Subtraktion oder ein „as“ für Addition und Subtraktion angefügt, welches auf die Rechenoperation(en) hinweist, die der Hypothese zugrunde liegt (liegen).

$H6_a$: Darstellungen mit räumlich etwas versetzten Plättchen sind weniger fehleranfällig als Darstellungen ohne räumliche Versetzung.

Aufgabe

$H7_a$: Aufgaben mit dem größeren Summanden an erster Stelle sind weniger fehleranfällig als Aufgaben mit dem kleineren Summanden an erster Stelle.

$H8_a$: Aufgaben mit zwei gleichen Summanden sind weniger fehleranfällig als Aufgaben mit unterschiedlichen Summanden.

zu Subtraktionsaufgaben:

Aufbau

$H9_s$: Dynamische Darstellungen sind weniger fehleranfällig als statische Darstellungen und weniger fehleranfällig als die Abfolge verschiedener „Bilder“.

$H10_s$: Darstellungen, in denen der Subtrahend sichtbar bleibt, sind weniger fehleranfällig als Darstellungen, in denen der Subtrahend verschwindet.

Farbgebung

$H11_s$: Einfarbige Darstellungen sind weniger fehleranfällig als zweifarbige Darstellungen.

Räumliche Anordnung

$H12_s$: Die Darstellung über die Anordnung als Block ist weniger fehleranfällig als die Darstellung über die lineare Anordnung.

$H13_s$: Darstellungen mit räumlich etwas versetzten Plättchen sind weniger fehleranfällig als Darstellungen ohne räumliche Versetzung.

Die Ergebnisse der ersten Untersuchung legen nahe, Hypothesen bezüglich der Eindeutigkeit der Aufgaben aufzustellen.

6.3 Weitere Grundannahme

Die verschiedenen Darstellungen unterscheiden sich in ihrer Eindeutigkeit. Ich gehe davon aus, dass die Art der Darstellung Auswirkungen auf die Anzahl der verschiedenen Übersetzungen haben wird.

6.4 Weitere Hypothesen – Unterthesen

$H14_{as}$: Subtraktionsaufgaben sind weniger eindeutig als Additionsaufgaben.

zu Additionsaufgaben:

Aufbau

$H15_a$: Statische Aufgaben sind weniger eindeutig als dynamische Aufgaben und weniger eindeutig als die Abfolge verschiedener „Bilder".

$H16_a$: Darstellungen ohne sichtbares Endergebnis sind weniger eindeutig als Darstellungen mit sichtbarem Endergebnis.

Farbgebung

$H17_a$: Zweifarbige Darstellungen sind weniger eindeutig als einfarbige Darstellungen.

Räumliche Anordnung

$H18_a$: Die Darstellung über die lineare Anordnung ist weniger eindeutig als die Darstellung über die Anordnung als Block.

$H19_a$: Darstellungen ohne räumliche Versetzung sind weniger eindeutig als Darstellungen mit räumlich etwas versetzten Plättchen.

Aufgabe

$H20_a$: Aufgaben mit dem kleineren Summanden an erster Stelle sind weniger eindeutig als Aufgaben mit dem größeren Summanden an erster Stelle.

H21$_a$: Aufgaben mit unterschiedlichen Summanden sind weniger eindeutig als Aufgaben mit zwei gleichen Summanden.

zu Subtraktionsaufgaben:

Aufbau

H22$_s$: Statische Aufgaben sind weniger eindeutig als dynamische Aufgaben und weniger eindeutig als die Abfolge verschiedener „Bilder".

H23$_s$: Darstellungen, in denen der Subtrahend sichtbar bleibt, sind weniger eindeutig als Darstellungen, in denen der Subtrahend verschwindet.

Farbgebung

H24$_s$: Zweifarbige Darstellungen sind weniger eindeutig als einfarbige Darstellungen.

Räumliche Anordnung

H25$_s$: Die Darstellung über die lineare Anordnung ist weniger eindeutig als die Darstellung über die Anordnung als Block.

H26$_s$: Darstellungen ohne räumliche Versetzung sind weniger eindeutig als Darstellungen mit räumlich etwas versetzten Plättchen.

7. Vorgehen bei der Auswertung der erhobenen Daten

Um einen Überblick über alle symbolisch aufgeschriebenen Aufgaben mit Ergebnis sowie deren Häufigkeiten zu bekommen, werden die Daten in einem ersten Schritt in das Fragebogenprogramm GrafStat eingegeben. Bildliche, unvollständige oder fehlende Darstellungen werden als solche eingegeben (Zeichnung / kein Ergebnis / unvollständig / keine Antwort).[73]

In einem zweiten Schritt erfolgt die Eingabe der Daten ohne Ergebnis.[74] Diese bilden die Grundlage für die folgende Auswertung. In manchen Fällen kann die Form der Darstellung zwar Auswirkungen auf das Ergebnis haben (z.B. wenn der Minuend falsch abgezählt wurde und die Aufgabe nicht gerechnet, sondern anhand der Darstellung gelöst wurde; z.B. Aufgabe 2s: 8-3=6), entscheidender scheint mir jedoch die Betrachtung des aufgeschriebenen Termes ohne Ergebnis.

Für die quantitative Auswertung ist es erforderlich, die einzelnen Termdeutungen Kategorien zuzuordnen. Bei der Betrachtung ergeben sich drei Kategorien: „Termdeutung korrekt“, „Termdeutung problematisch“ und „Termdeutung falsch bzw. nicht nachvollziehbar“. Welche Aufgabenarten den drei Kategorien zugeordnet werden, kann man Tabelle 7.1 und Tabelle 7.2 entnehmen. Die Begrifflichkeit bei der korrekten Termdeutung bezieht sich auf die in Kapitel 1.3 beschriebenen Aspekte der Addition und Subtraktion nach PADBERG.

Termdeutung korrekt	**Termdeutung problematisch**	**Termdeutung falsch / nicht nachvollziehbar**
Vereinigen / Verändern (Teile-Ganzes-Konzept)	Veränderung irrelevant (+0)	Zählfehler
Ausgleichen / Verglei-chen		Minusaufgabe
		nur ein Bild betrachtet
		ganz andere Aufgabe

Tab. 7.1: Kategorien der Termdeutung, Addition

[73] siehe Häufigkeitsauszählung „mit Ergebnis“, Anhang C
[74] siehe Häufigkeitsauszählung „ohne Ergebnis“, Anhang D

Termdeutung korrekt	**Termdeutung problematisch**	**Termdeutung falsch / nicht nachvollziehbar**
Abziehen / Ergänzen / Vereinigen (Teile-Ganzes-Konzept)	Veränderung irrelevant (-0; n-n)	Zählfehler
Vergleichen (Unterschied)	a-b-c=0	Plusaufgabe
Bezug zum 10er	Orientierung an Farbe	nur ein Bild betrachtet
		ganz andere Aufgabe

Tab. 7.2: Kategorien der Termdeutung, Subtraktion

Da bei der statistischen Auswertung nur zwischen zwei Kategorien unterschieden werden soll, werden die Kategorien „Termdeutung problematisch“ und „Termdeutung falsch bzw. nicht nachvollziehbar“ zusammen genommen und im Folgenden als „falsch“ bezeichnet.

Den unterschiedlichen Bereichen und ihren jeweiligen Darstellungsformen werden die Aufgaben der Untersuchung zugewiesen. Tabelle 7.3 und Tabelle 7.4 geben einen Überblick, welche Aufgaben welchen Darstellungsformen zuzuordnen sind.

Zur Prüfung der Hypothesen $H1_{as}$ bis $H13_{s}$ werden die Anzahlen richtiger und falscher Übersetzungen (ohne Ergebnis) bei den einzelnen Darstellungsformen in den verschiedenen Bereichen (vgl. Tabelle 7.3 und 7.4) ermittelt. Diese Anzahlen von jeweils zwei sich gegenseitig ausschließenden Darstellungsformen (z.B. dynamisch vs. statisch, einfarbig vs. zweifarbig) werden anhand des Chi-Quadrat-Tests auf Signifikanz hin überprüft. Signifikante Ergebnisse weisen darauf hin, dass der aufgetretene Unterschied mit 95%iger Wahrscheinlichkeit (5%-Signifikanz-Niveau, $\alpha = 0{,}05$) nicht zufällig ist.

Die Hypothesen $H14_{as}$ bis $H26_{s}$ beziehen sich auf die Eindeutigkeit der Aufgaben. Eindeutigkeit meint in diesem Zusammenhang die Anzahl der angegebenen verschiedenen Übersetzungen (ohne Ergebnis). Die Häufigkeit der jeweiligen Übersetzung wird hierbei nicht berücksichtigt. Für jede Darstellungsform wird der Mittelwert der Anzahl gegebener Übersetzungen aus den jeweiligen Aufgaben gebildet (vgl. Tabelle 7.3 und 7.4). Die Mittelwerte werden daraufhin miteinander verglichen und so auf die Hypothesen Bezug genommen, wobei keine statistische Überprüfung der Signifikanz erfolgt.[75]

Aufbau

dynamisch	Abfolge verschiedener „Bilder“	statisch
1 - 3	7 - 12	4 - 6

sichtbares Endergebnis	ohne sichtbares Endergebnis
1 - 9	10 - 12

Farbgebung

einfarbig	zweifarbig
2, 5, 8	1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12

räumliche Anordnung

Blockanordnung	lineare Anordnung
1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 12	3, 4, 8, 11

räumlich versetzt	räumlich nicht versetzt
1, 2, 4, 5, 7, 8	3, 6, 9

Aufgabe

größerer Summand an 1. Stelle	kleinerer Summand an 1. Stelle
2, 3, 5, 6, 9, 10	1, 4, 7, 11

unterschiedliche Summanden	gleiche Summanden
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11	8, 12

Tab. 7.3: Zuordnung Aufgaben zu Darstellungsformen, Addition

[75] In diesem Fall ist der Chi-Quadrat-Test nicht möglich, da zwei Werte miteinander verglichen werden sollen. Die Festsetzung eines „normalen“ Wertes zur Betrachtung der Abweichung davon erscheint mir nicht als sinnvoll. Möglich wäre eine Betrachtung des Gesamtmittelwertes und davon ausgehend die Berechnung der Standardabweichung; darauf wird jedoch ebenfalls verzichtet.

Aufbau

dynamisch	Abfolge verschiedener „Bilder“	statisch
1 - 4	5 - 8	9 - 12

Subtrahend sichtbar	Subtrahend nicht sichtbar
1, 2, 5, 6, 9, 10, 11, 12	3, 4, 7, 8

Farbgebung

einfarbig	zweifarbig
1, 3, 5, 7, 11	2, 4, 6, 8, 9, 10, 12

räumliche Anordnung

Blockanordnung	lineare Anordnung
1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12	2, 6, 10, 11

räumlich versetzt	räumlich nicht versetzt
11, 12	9, 10

Tab. 7.4: Zuordnung Aufgaben zu Darstellungsformen, Subtraktion

Im Anschluss wird untersucht, welche Aufgaben welche richtigen Deutungen begünstigen. Dabei wird bei der Addition zwischen Vereinigen bzw. Verändern (Teile-Ganzes-Konzept) und Ausgleichen bzw. Vergleichen unterschieden. Zwischen Vereinigen und Verändern sowie Ausgleichen und Vergleichen kann nicht unterschieden werden, da aus der symbolischen Schreibweise nicht hervorgeht, was das jeweilige Kind dazu gedacht hat. Ebenso verhält es sich bei der Subtraktion, wo zwischen Abziehen, Ergänzen bzw. Vereinigen (Teile-Ganzes-Konzept) und Vergleichen (Unterschied) unterschieden wird.

Als nächstes werden zuerst die problematischen Termdeutungen ausgewertet, dann wird auf die falschen oder nicht nachvollziehbaren sowie die unvollständigen bzw. fehlenden Termdeutungen eingegangen. Es folgt eine Einzelfallbetrachtung, bei der alle Aufgaben betrachtet werden.

Schließlich werden die Übersetzungen der Mädchen und die der Jungen gegenübergestellt und es wird geprüft, ob zwischen den Geschlechtern bedeutende Unterschiede festzustellen sind. Hierbei wird Bezug genommen auf den Anteil korrekter Termdeutungen.

Abschließend werden die Ergebnisse der verschiedenen Schulorte miteinander verglichen. Dies geschieht ebenfalls über den Vergleich des Anteils richtiger Termdeutungen. Bei der Auswertung muss auf die Schule 4 verzichtet werden, da hier nur eine Schülerin teilnehmen konnte. Ihre Ergebnisse fließen jedoch in die Berechnung der Gesamtmittelwerte mit ein, welche als Bezugspunkte herangezogen werden (im Sinne von „besser als der Durchschnitt“ bzw. „schlechter als der Durchschnitt“). Bei den Aufgaben zur Subtraktion wird zusätzlich der Anteil der Deutungen im Sinne des Teile-Ganzes-Konzepts ermittelt und unter den Schulen verglichen.

8. Ergebnisse der Untersuchung

8.1 Art der Darstellung und Fehleranfälligkeit

Im Folgenden sollen die aufgestellten Hypothesen zur Fehleranfälligkeit anhand der Untersuchungsergebnisse überprüft werden.

Hypothese $H1_{as}$ nimmt Bezug auf die Operationen Addition und Subtraktion.

$H1_{as}$: Aufgaben zur Addition sind weniger fehleranfällig als Aufgaben zur Subtraktion.

Aufgaben zur Addition werden durchschnittlich zu 88,8%[76] korrekt übersetzt[77], Aufgaben zur Subtraktion zu 65,8%. Der Unterschied ist hoch signifikant[78] ($p < 0{,}001$; $\chi^2 = 90{,}536$). $H1_{as}$ kann somit nicht widerlegt werden.

Die Hypothesen $H2_a$ bis $H8_a$ beziehen sich auf die zwölf Aufgaben zur Addition.

Hypothese $H2_a$ und $H3_a$ beziehen sich auf den Aufbau der Aufgaben.

$H2_a$: Dynamische Darstellungen sind weniger fehleranfällig als statische Darstellungen und weniger fehleranfällig als die Abfolge verschiedener „Bilder".

Dynamisch dargebotene Aufgaben werden durchschnittlich zu 86,0% richtig übersetzt, statische Darstellungen zu 88,7% und Darstellungen als Abfolge verschiedener „Bilder" zu 90,3%. Während in der Hypothese davon ausgegangen wurde, dass dynamische Darstellungen weniger fehleranfällig sind, wird hier der niedrigste Prozentsatz korrekter Termdeutungen erreicht. Die Unterschiede sind jedoch nicht signifikant.

[76] Die Angaben werden auf eine Dezimalstelle gerundet.
[77] Wie oben ausgeführt, bezieht sich die Auswertung auf Termdeutungen ohne Ergebnis; wenn im Folgenden von „korrekt gelöst" gesprochen wird, ist damit nicht das richtige Übersetzen und Lösen der Aufgabe gemeint, sondern lediglich die korrekte Übersetzung von der ikonischen in die symbolische Schreibweise.
[78] Bei $\alpha < 0{,}001$ wird der Unterschied als hochsignifikant bezeichnet.

$H3_a$: Darstellungen mit sichtbarem Endergebnis sind weniger fehleranfällig als Darstellungen ohne sichtbares Endergebnis.

Mit 89,6% richtiger Antworten bei Darstellungen mit sichtbarem Endergebnis sind diese zwar etwas weniger fehleranfällig als Darstellungen ohne sichtbares Endergebnis (86,7%), es liegt jedoch wiederum keine Signifikanz vor.

Hypothese $H4_a$ bezieht sich auf die Farbgebung der Darstellungen.

$H4_a$: Einfarbige Darstellungen sind weniger fehleranfällig als zweifarbige Darstellungen.

Bei der Farbgebung ist tatsächlich ein signifikanter Unterschied festzustellen ($p = 0,009$; $\chi^2 = 6,861$). So sind einfarbige Darstellungen mit 94,7% richtiger Antworten weniger fehleranfällig als zweifarbige Darstellungen mit 86,9%. *$H4_a$* kann nicht widerlegt werden.

Die Hypothesen $H5_a$ und $H6_a$ beziehen sich auf die räumliche Anordnung der dargebotenen Aufgaben.

$H5_a$: Die Darstellung über die Anordnung als Block ist weniger fehleranfällig als die Darstellung über die lineare Anordnung.

Die Darstellung über die Anordnung als Block und die lineare Anordnung unterscheiden sich in den Prozentsätzen der richtigen Übersetzungen kaum (88,5% bzw. 89,5% richtig).

$H6_a$: Darstellungen mit räumlich etwas versetzten Plättchen sind weniger fehleranfällig als Darstellungen ohne räumliche Versetzung.

Hochsignifikant ist der Unterschied zwischen Darstellungen mit räumlich versetzten Plättchen (93,3% richtig) und solchen ohne räumliche Versetzung (82,0% richtig; $p < 0,001$; $\chi^2 = 13,732$). Ein Zusammenhang mit der farblichen Gestaltung als Drittvariable ist möglich. Daher werden in einer weiteren Überprüfung nur zweifarbige Darstellungen berücksichtigt. So erhält man wiederum einen signifikanten

Wert ($p = 0{,}017$; $\chi^2 = 5{,}654$), sodass davon auszugehen ist, dass die räumliche Versetzung eine Rolle spielt und *$H6_a$* nicht widerlegt werden kann.

Auf die Reihenfolge und Größe der Summanden beziehen sich die Hypothesen $H7_a$ und $H8_a$.

$H7_a$: Aufgaben mit dem größeren Summanden an erster Stelle sind weniger fehleranfällig als Aufgaben mit dem kleineren Summanden an erster Stelle.

Aufgaben mit dem kleineren Summanden an erster Stelle sind mit 92,0% weniger fehleranfällig als Aufgaben mit dem größeren Summanden an erster Stelle (86,3%). Der Unterschied ist jedoch nicht signifikant.

$H8_a$: Aufgaben mit zwei gleichen Summanden sind weniger fehleranfällig als Aufgaben mit unterschiedlichen Summanden.

Aufgaben mit zwei gleichen Summanden sind etwas weniger fehleranfällig als Aufgaben mit zwei unterschiedlichen Summanden (90,0% bzw. 88,6%), eine Signifikanz liegt nicht vor.

Die Hypothesen $H9_s$ bis $H13_s$ beziehen sich auf die zwölf Aufgaben zur Subtraktion.

Hypothese $H9_s$ und $H10_s$ beziehen sich auf den Aufbau der Aufgaben.

$H9_s$: Dynamische Darstellungen sind weniger fehleranfällig als statische Darstellungen und weniger fehleranfällig als die Abfolge verschiedener „Bilder".

Dynamische Darstellungen werden durchschnittlich zu 68,5% korrekt gedeutet, statische Darstellungen zu 70,5% und Darstellungen als Abfolge verschiedener „Bilder" zu 58,5%. Der Unterschied zwischen dynamischer und statischer Darstellung ist nicht signifikant. Dynamische Darstellungen sind signifikant weniger fehleranfällig als die Abfolge verschiedener „Bilder" ($p = 0{,}038$; $\chi^2 = 4{,}315$). Statische Darstellungen sind ebenfalls signifikant weniger fehleranfällig als die Abfolge verschiedener „Bilder" ($p = 0{,}012$; $\chi^2 = 6{,}289$).

$H10_s$: Darstellungen, in denen der Subtrahend sichtbar bleibt, sind weniger fehleranfällig als Darstellungen, in denen der Subtrahend verschwindet.

Die Ergebnisse der Untersuchung legen nahe, dass es keinen relevanten Unterschied gibt, wenn der Subtrahend sichtbar (66,3%) bzw. wenn er nicht sichtbar ist (65,0%).

Hypothese $H11_s$ bezieht sich auf die Farbgebung der Darstellungen.

$H11_s$: Einfarbige Darstellungen sind weniger fehleranfällig als zweifarbige Darstellungen.

Einfarbige Aufgaben werden zu 76,0% richtig übersetzt, zweifarbige dagegen nur zu 58,6%. Das Ergebnis ist hochsignifikant ($p < 0{,}001$; $\chi^2 = 19{,}694$), $H11_s$ kann nicht widerlegt werden.

Die Hypothesen $H12_s$ und $H13_s$ beziehen sich auf die räumliche Anordnung der dargebotenen Aufgaben.

$H12_s$: Die Darstellung über die Anordnung als Block ist weniger fehleranfällig als die Darstellung über die lineare Anordnung.

Die Darstellung in Blockanordnung erweist sich mit 68,8% als signifikant weniger fehleranfällig als die lineare Anordnung mit 60,0% richtigen Antworten ($p = 0{,}033$; $\chi^2 = 4{,}538$). $H12_s$ kann nicht widerlegt werden.

$H13_s$: Darstellungen mit räumlich etwas versetzten Plättchen sind weniger fehleranfällig als Darstellungen ohne räumliche Versetzung.

Ebenfalls signifikant unterscheiden sich die Darstellungen mit räumlich etwas versetzten Plättchen (80,0%) von den Darstellungen ohne räumliche Versetzung (61,0% richtig; $p = 0{,}003$; $\chi^2 = 8{,}679$). $H13_s$ kann ebenfalls nicht widerlegt werden.

Zusammenfassung der signifikanten Ergebnisse:

Additionsaufgaben sind weniger fehleranfällig als Subtraktionsaufgaben. Die Farbgebung sowie die räumliche Versetzung haben sowohl bei der Addition als auch bei der Subtraktion Auswirkungen auf die Fehlernanfälligkeit (weniger fehleranfällig sind einfarbige bzw. räumlich versetzte Darstellungen). Bei der Subtraktion ist die Präsentation als Abfolge verschiedener „Bilder“ fehleranfälliger als dynamische oder statische Präsentationsformen. Im Vergleich zur linearen Anordnung ist die Anordnung im Block weniger fehleranfällig.

Nach der Prüfung der Hypothesen wird nun die Grundannahme / Ausgangsthese betrachtet:

Die Kinder übersetzen die Darstellungen in formale Schreibweisen, wobei es sowohl zu unterschiedlichen sinnvollen als auch zu fehlerhaften Übersetzungen kommt. Dabei gehe ich davon aus, dass die Art der Darstellung Auswirkungen auf die Übersetzung haben wird.

1.) 49 Kinder übersetzen die ikonischen Darstellungen in formale Schreibweisen. Ein Kind fertigt ikonisch-symbolische Darstellungen an (vgl. Kap. 8.3.5).

2.) Die Kinder gelangen zu verschiedene Übersetzungen – sowohl unterschiedliche richtige als auch unterschiedliche fehlerhafte Übersetzungen. Weitere müssen als problematisch betrachtet werden (vgl. Kap. 8.3).

3.) In manchen Bereichen scheint die Art der Darstellung Auswirkungen auf die Übersetzung zu haben. Insbesondere gilt dies für die Farbgebung und die räumliche Anordnung.

4.) Aufgaben zur Addition sind deutlich weniger fehleranfällig als Aufgaben zur Subtraktion.

8.2 Art der Darstellung und Eindeutigkeit

Im Folgenden werden die Hypothesen zur Eindeutigkeit der Darstellungsformen näher betrachtet.

Hypothese $H14_{as}$ nimmt Bezug auf die beiden Operationen Addition und Subtraktion.

$H14_{as}$: Subtraktionsaufgaben sind weniger eindeutig als Additionsaufgaben.

Bei Additionsaufgaben werden durchschnittlich 4,7 verschiedene Antworten gegeben, bei der Subtraktion sind es im Schnitt 9,3 und damit fast doppelt so viele. Die Hypothese kann folglich nicht widerlegt werden.

Die Hypothesen $H15_a$ bis $H21_a$ beziehen sich auf die zwölf Aufgaben zur Addition.

Hypothese $H15_a$ und $H16_a$ beziehen sich auf den Aufbau der Aufgaben.

$H15_a$: Statische Aufgaben sind weniger eindeutig als dynamische Aufgaben und weniger eindeutig als die Abfolge verschiedener „Bilder".

Statische Aufgaben ($\bar{x}$[79] = 4,3) unterscheiden sich in ihrer Eindeutigkeit kaum von Aufgaben mit einer Abfolge verschiedener „Bilder" ($\bar{x}$ = 4,5). Am wenigsten eindeutig sind dynamische Aufgaben ($\bar{x}$ = 5,3), bei denen durchschnittlich eine Antwort mehr angegeben wird als bei statischen.

$H16_a$: Darstellungen ohne sichtbares Endergebnis sind weniger eindeutig als Darstellungen mit sichtbarem Endergebnis.

Darstellungen ohne sichtbares Endergebnis sind mit durchschnittlich 5 verschiedenen Antworten nur etwas weniger eindeutig als Aufgaben mit sichtbarem Endergebnis ($\bar{x}$ = 4,6).

[79] $\bar{x}$ bezeichnet den Mittelwert.

Hypothese $H17_a$ bezieht sich auf die Farbgebung der Darstellungen.

$H17_a$: Zweifarbige Darstellungen sind weniger eindeutig als einfarbige Darstellungen.

Mit durchschnittlich knapp zwei Antworten mehr pro Aufgabe sind zweifarbige Darstellungen ($\bar{x}$ = 5,1) weniger eindeutig als einfarbige ($\bar{x}$ = 3,3). Die Hypothese kann nicht widerlegt werden.

Die Hypothesen $H18_a$ und $H19_a$ beziehen sich auf die räumliche Anordnung der dargebotenen Aufgaben.

$H18_a$: Die Darstellung über die lineare Anordnung ist weniger eindeutig als die Darstellung über die Anordnung als Block.

Der Mittelwert bei den Darstellungen über die lineare Anordnung ($\bar{x}$ = 4,3) ist etwas geringer als der Mittelwert bei den Blockanordnungen ($\bar{x}$ = 4,9).

$H19_a$: Darstellungen ohne räumliche Versetzung sind weniger eindeutig als Darstellungen mit räumlich etwas versetzten Plättchen.

Darstellungen ohne räumliche Versetzung sind deutlich weniger eindeutig ($\bar{x}$ = 6,3) als Darstellungen mit räumlicher Versetzung ($\bar{x}$ = 3,7). Die Hypothese kann somit nicht widerlegt werden.

Die Hypothesen $H20_a$ und $H21_a$ beziehen sich auf die Reihenfolge und Größe der Summanden.

$H20_a$: Aufgaben mit dem kleineren Summanden an erster Stelle sind weniger eindeutig als Aufgaben mit dem größeren Summanden an erster Stelle.

Aufgaben mit dem kleineren Summand an erster Stelle sind etwas eindeutiger ($\bar{x}$ = 4,3) als Aufgaben mit dem größeren Summand an erster Stelle ($\bar{x}$ = 5,2).

$H21_a$: Aufgaben mit unterschiedlichen Summanden sind weniger eindeutig als Aufgaben mit zwei gleichen Summanden.

Aufgaben mit unterschiedlichen Summanden sind etwas weniger eindeutig ($\bar{x}$ = 4,8) als Aufgaben mit gleichen Summanden ($\bar{x}$ = 4,0).

Die Hypothesen $H22_s$ bis $H26_s$ beziehen sich auf die zwölf Aufgaben zur Subtraktion.

Hypothese $H22_s$ und $H23_s$ beziehen sich auf den Aufbau der Aufgaben.

$H22_s$: Statische Aufgaben sind weniger eindeutig als dynamische Aufgaben und weniger eindeutig als die Abfolge verschiedener „Bilder".

Statische Aufgaben sind etwas weniger eindeutig ($\bar{x}$ = 9,5) als dynamische Aufgaben ($\bar{x}$ = 8,0). Die Abfolge verschiedener „Bilder" ist am wenigsten eindeutig ($\bar{x}$ = 10,3).

$H23_s$: Darstellungen, in denen der Subtrahend sichtbar bleibt, sind weniger eindeutig als Darstellungen, in denen der Subtrahend verschwindet.

Der Mittelwert bei Darstellungen, bei denen der Subtrahend sichtbar bleibt ($\bar{x}$ = 8,8) ist geringer (und somit die Aufgabe eindeutiger) als der Mittelwert der Darstellungen, bei denen der Subtrahend verschwindet ($\bar{x}$ = 10,3).

Hypothese $H24_s$ bezieht sich auf die Farbgebung der Darstellungen.

$H24_s$: Zweifarbige Darstellungen sind weniger eindeutig als einfarbige Darstellungen.

Bei Aufgaben mit zweifarbigen Darstellungen ($\bar{x}$ = 10,3) werden im Durchschnitt 2,5 Antworten mehr gegeben als bei einfarbigen Darstellungen (7,8). Die Hypothese kann nicht widerlegt werden.

Die Hypothesen $H25_s$ und $H26_s$ beziehen sich auf die räumliche Anordnung der dargebotenen Aufgaben.

$H25_s$: Die Darstellung über die lineare Anordnung ist weniger eindeutig als die Darstellung über die Anordnung als Block.

Die Darstellungen über die lineare Anordnung unterscheiden sich in ihrer Eindeutigkeit kaum von denen über die Anordnung als Block ($\bar{x}$ = 9,5 bzw. $\bar{x}$ = 9,1).

$H26_s$: Darstellungen ohne räumliche Versetzung sind weniger eindeutig als Darstellungen mit räumlich etwas versetzten Plättchen.

Darstellungen ohne räumliche Versetzung ($\bar{x}$ = 12,5) sind weniger eindeutig als Darstellungen mit räumlicher Versetzung ($\bar{x}$ = 6,5). Damit kann diese Hypothese nicht widerlegt werden.

<u>Zusammenfassung der Ergebnisse, bei denen ein großer Unterschied vorliegt:</u>

Subtraktionsaufgaben sind weniger eindeutig als Additionsaufgaben. Die Farbgebung sowie die räumliche Versetzung haben sowohl bei der Addition als auch bei der Subtraktion Auswirkungen auf die Eindeutigkeit (eindeutiger sind einfarbige bzw. räumlich versetzte Darstellungen).

Nach der Prüfung der Hypothesen wird nun die weitere Grundannahme / Ausgangsthese betrachtet:

Die verschiedenen Darstellungen unterscheiden sich in ihrer Eindeutigkeit. Ich gehe davon aus, dass die Art der Darstellung Auswirkungen auf die Anzahl der verschiedenen Übersetzungen haben wird.

1.) Die Anzahl der verschiedenen Übersetzungen variiert bei den 24 Aufgaben der Untersuchung stark: zwischen zwei Antworten bei Aufgabe 4a und 13 Antworten bei Aufgabe 4s.

2.) Die Art der Darstellung scheint in manchen Bereichen Auswirkungen auf die Eindeutigkeit zu haben. Insbesondere gilt dies für die Farbgebung und die räumliche Versetzung, sowohl bei der Addition als auch bei der Subtraktion.

3.) Aufgaben zur Subtraktion sind deutlich weniger eindeutig als Aufgaben zur Addition.

8.3 Termdeutungen

8.3.1 Korrekte Termdeutungen

Nun werden die korrekten Termdeutungen näher betrachtet.

Bei der Addition überwiegt das Teile-Ganzes-Verständnis in den richtigen Antworten. Lediglich bei Aufgabe 11a wird die Darstellung auch im Sinne eines Aus- oder Vergleichens gedeutet (10,9% der richtigen Antworten; 1+4 bzw. 4+1). Fünf Schüler deuten die Darstellung der „Bilderabfolge“ auf diese Art.

Größere Unterschiede treten bei der Subtraktion auf. Bei den Aufgaben 3s, 4s, 7s und 8s ist eine Einteilung der richtigen Termdeutungen nicht möglich, da die Antworten sowohl dem Teile-Ganzes-Konzept als auch der Berechnung des Unterschiedes zugeordnet werden können. Bei den restlichen Aufgaben ist dies möglich. Die Deutung nach dem Teile-Ganzes-Verständnis überwiegt bei Aufgabe 5s (26 der 28 richtigen Antworten) und Aufgabe 6s (21 der 21 richtigen Antworten). Bei den beiden Aufgaben handelt es sich um Darstellungen in einer Abfolge von zwei „Bildern“, wobei beim zweiten Bild der Subtrahend sichtbar bleibt und größer ist als die Anzahl des anderen Teils. In den restlichen Aufgaben berechnet die Mehrzahl der richtig antwortenden Kinder den Unterschied zwischen den Anzahlen[80]:

Aufgabe 1s: 29 der 45 richtigen Antworten (64,4%)

Aufgabe 2s: 21 der 30 richtigen Antworten (70,0%)

Aufgabe 9s: 18 der 31 richtigen Antworten (58,1%)

Aufgabe 10s: 22 der 30 richtigen Antworten (73,3%)

Aufgabe 11s: 31 der 39 richtigen Antworten (79,5%)

Aufgabe 12s: 34 der 41 richtigen Antworten (82,9%)

[80] Die gezeigten Objekte werden durch Zahlen ersetzt, es wird keine Verbindung zur Gesamtmenge hergestellt.

Eine Besonderheit stellt die als korrekt gewertete Deutung eines Kindes bei Aufgabe 9s dar. In der statischen Darstellung wird ein Bezug zum 10er hergestellt (10 – 2 = 8).

Korrekte Termdeutungen machen insgesamt einen Anteil von 77,3% aus (bei Addition 88,8%; bei Subtraktion 65,8%).

8.3.2 Problematische Termdeutungen

Als problematisch werden Termdeutungen betrachtet,

a) bei denen die Veränderung irrelevant ist (+ 0, – 0, n – n)

b) die in der Form a – b – c = 0 dargestellt werden (Subtraktion)

c) die sich an der Farbe orientieren (Subtraktion)

zu a) Veränderung irrelevant (+ 0, – 0, n – n)

Termdeutungen der Form n + 0 kommen bei den Aufgaben 3a (4-mal), 6a (2-mal) und 8a (1-mal) vor. Aufgabe 3a (dynamisch) und 6a (statisch) sind jeweils zweifarbige Darstellungen ohne räumliche Versetzung. Aufgabe 8a (Abfolge) ist einfarbig und mit räumlicher Versetzung.

Termdeutungen der Form n – 0 treten bei den Aufgaben 9s (3-mal), 10s (2-mal) und 11s (1-mal) auf. Hierbei handelt es sich um statische Darstellungen, wobei die Aufgaben 9s und 10s zweifarbig und ohne räumliche Versetzung sind, die Aufgabe 11s ist einfarbig und mit räumlicher Versetzung.

Bei Aufgabe 5s (4-mal), 6s (2-mal), 10s (2-mal) und 12s (1-mal) gibt es Deutungen der Form n – n. Aufgabe 5s (einfarbig) und 6s (zweifarbig) werden als Abfolge von „Bildern“ präsentiert, wobei der Subtrahend auf dem zweiten „Bild“ sichtbar bleibt. Aufgabe 10s (ohne räumliche Versetzung) und 12s (mit räumlicher Versetzung) sind zweifarbig und werden statisch präsentiert.

zu b) Form a – b – c = 0

Termdeutungen der Form a – b – c = 0 treten bei Aufgabe 5s (1-mal) und 6s (2-mal) auf. Die Aufgaben werden als Abfolge von „Bildern" präsentiert, bei denen der Subtrahend sichtbar bleibt. Im zweiten „Bild" werden beide Mengen als Subtrahenden interpretiert und es wird keine Verbindung zum ersten „Bild" hergestellt.

zu c) Orientierung an Farbe

Termdeutungen, die sich an der Farbe orientieren, treten bei den Aufgaben 2s (5-mal) und 6s (6-mal) auf. Während die Farbgebung bei anderen Aufgaben, zum Beispiel bei statisch präsentierten, für die Deutung relevant ist, ist sie hier problematisch. Der Handlung des Wegschiebens bei Aufgabe 2s bzw. der räumliche Versetzung im zweiten „Bild" bei Aufgabe 6s werden bei der Orientierung an der Farbe keine Beachtung geschenkt, obwohl hier die Veränderung und damit die Operation veranschaulicht wird.

Problematische Termdeutungen machen insgesamt einen Anteil von 3,0% aus (bei Addition 1,2%; bei Subtraktion 4,8%).

8.3.3 Falsche oder nicht nachvollziehbare Termdeutungen

Als falsch oder nicht nachvollziehbar werden Deutungen gewertet,

a) bei denen eine falsche Rechenoperation notiert wird (minus statt plus oder umgekehrt)[81]

b) die vermutlich auf Zählfehlern basieren,

c) bei denen vermutlich nur ein Bild betrachtet wird (Anfangs- oder Endzustand)

d) die eine ganz andere, zur Darstellung nicht passende oder nicht offensichtlich nachvollziehbare Aufgabe wiedergeben.

[81] Bei manchen Aufgaben ist eine Deutung sowohl als Plus- als auch als Minusaufgabe möglich und naheliegend. In der Auswertung wird die Umkehroperation dennoch als falsch gewertet, da die Schüler im ersten Teil der Untersuchung aufgefordert werden, eine passende Plusaufgabe bzw. im zweiten Teil eine passende Minusaufgabe aufzuschreiben.

Bei der Addition wird in drei Aufgaben jeweils einmal eine – eigentlich passende – Minusaufgabe notiert (Aufgabe 3a, 6a und 10a). Bei der Subtraktion werden keine Plusaufgaben aufgeschrieben.

b) und c) sind Vermutungen, worauf die Fehler eventuell zurück gehen könnten. Da es sich hierbei nur um Spekulationen handelt, wird an dieser Stelle darauf verzichtet, zwischen b), c) und d) zu unterscheiden.

Interessanter erscheint mir, auf einen recht häufig auftretenden Übersetzungs"fehler" näher einzugehen. Beispielsweise bei Aufgabe 5s schreiben neun Kinder (18%) als Antwort „2 – 5 = 3" auf. Die Kinder haben die Anzahlen im zweiten „Bild" richtig erkannt bzw. abgezählt, jedoch keine Verbindung zum ersten „Bild" gesehen, um die Aufgabe im Sinne des Teile-Ganzes-Konzepts zu interpretieren. Es wäre aber auch möglich gewesen, den Unterschied festzustellen: „Am Anfang waren es sieben Plättchen. Die werden aufgeteilt. Links liegen zwei, rechts liegen fünf. Wie viele liegen rechts mehr als links?" Oder: „Wie viele liegen links weniger als rechts?" Oder: „Wie viele müsste man links noch dazu legen, damit es gleich viele sind?" Zwei Kinder haben bei Aufgabe 5s dementsprechend „5 – 2 = 3" angegeben. Da es für Kinder nicht offensichtlich ist, wie sie den Sachverhalt notieren können, sollte im Unterricht darüber gesprochen werden, wie dies geht.

Falsche oder nicht nachvollziehbare Termdeutungen machen insgesamt einen Anteil von 13,6% aus (bei Addition 7,0%; bei Subtraktion 20,2%).

8.3.4 Unvollständige oder keine Termdeutungen

Antworten, bei denen nur eine Zahl oder eine Zahl und ein Operationszeichen (+ oder –) notiert werden, werden hier als „unvollständige Termdeutungen" bezeichnet. Es ist anzunehmen, dass für die Kinder, die eine solche unvollständige Termdeutung angeben, keine Aufgabe zu dem Gezeigten passt. Die Antwort unterscheidet sich insofern von „keiner Antwort" nur dadurch, dass eine Ausgangsmenge notiert wurde. In beiden Fällen passt für die Kinder keine Aufgabe zu dem

Präsentierten. Daher werden die beiden Kategorien im Folgenden zusammen behandelt und begrifflich nicht unterschieden.

Bei den Additionsaufgaben geben bei Aufgabe 3a zwei Kinder (4%), in den Aufgaben 4a, 6a, 10a, 11a und 12a jeweils ein Kind (jeweils 2%) keine Antwort.

Während bei den Additionsaufgaben nur sehr selten keine Antwort gegeben wurde (1,2% aller Antworten), kommt dies bei der Subtraktion deutlich häufiger (7,2% aller Antworten) und bei fast allen Aufgaben (Ausnahme: Aufgabe 8s) vor.

Bei Aufgabe 1s gibt ein Kind (2%) keine Antwort, bei Aufgabe 5s und 7s sind es zwei Kinder (jeweils 4%), bei Aufgabe 3s und 12s drei Kinder (jeweils 6%), bei Aufgabe 2s, 4s und 11s vier Kinder (jeweils 8%), bei Aufgabe 6s fünf Kinder (10%), bei Aufgabe 10s sieben Kinder (14%) und bei Aufgabe 9s acht Kinder (16%).

Unvollständige oder keine Termdeutungen machen insgesamt einen Anteil von 4,2% aus (bei Addition 1,2%; bei Subtraktion 7,2%).

8.3.5 Ikonisch-symbolische Deutungen – Einzelfallbetrachtung

Ein Mädchen hat, trotz des an der Tafel notierten Beispiels, keine rein symbolischen Terme aufgeschrieben (vgl. Anhang B, Nr. 17).

Bei den Additionsaufgaben hat sie die gelegten Plättchen als Kreise abgezeichnet, mit einem Plus- und Gleichheitszeichen versehen und das entsprechende Ergebnis als Zahl dazugeschrieben. Bei Aufgabe 3a hat die Schülerin nichts notiert. Aufgabe 6a ist die einzige Aufgabe, bei der die Anzahl der Plättchen nicht stimmt (eins zu wenig). Alle anderen Aufgaben wurden korrekt übernommen und mit dem richtigen Ergebnis versehen.

Schwieriger und problematischer ist diese Form der Notation bei der Subtraktion, was die Schülerin mit einem Seufzer und der Anmerkung, dass das jetzt richtig schwierig gewesen sei, auch verbal zum Ausdruck bringt. Teilweise malt sie, analog zur Addition, die jeweiligen Plättchen als Kreise mit einem Minus- und einem

Gleichheitszeichen auf und schreibt das Ergebnis als Zahl (Aufgabe 1s bis 5s, 10s), bei anderen Aufgaben notiert sie auch das Ergebnis als Kreise (Aufgabe 7s, 8s, 9s, 11s, 12s), wobei bei Aufgabe 9s ihr Ergebnis „0“ folgerichtig nicht dargestellt wird (zum Ergebnis „0“ kommt sie, da sie die gezeigten Plättchen zweimal aufzeichnet). Bei Aufgabe 6s wird der Subtrahend als Zahl dargestellt und der Minuend und das Ergebnis als Kreise (wobei das Ergebnis auch eine Null sein könnte). Bei Aufgabe 10s werden die dargestellten Plättchen zweimal aufgezeichnet und die Summe (nicht die Differenz) als Zahl notiert. Bei anderen Aufgaben (2s und 7s) stimmt die Anzahl der Kreise nicht mit den gezeigten Plättchen überein.

Die von der Schülerin gewählte Notation mit einer Vermischung von ikonischen und symbolischen Elementen ist als sehr problematisch einzustufen. Gerade bei diesem Mädchen wäre es sicherlich sehr interessant zu überprüfen, wie es bei den anderen Übersetzungsrichtungen vorgeht.

Abb. 8.1 gibt einen Überblick über den jeweiligen Anteil der verschiedenen Kategorien.

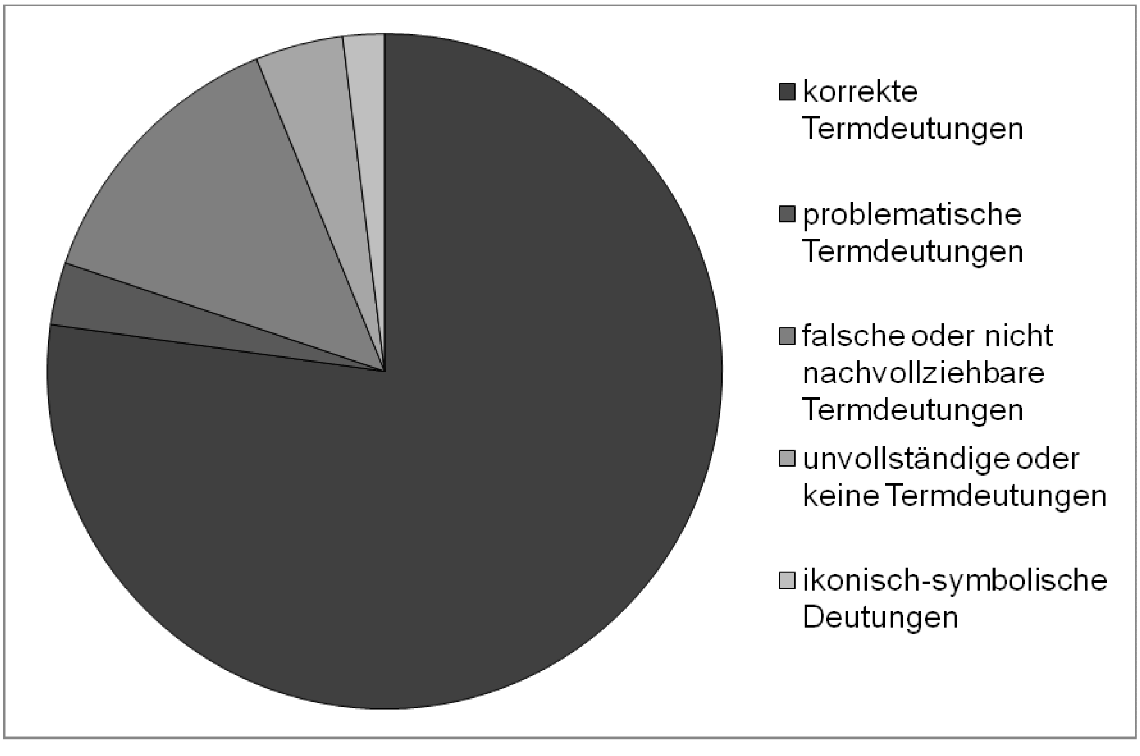


Abb. 8.1: Anteile unterschiedlicher Termdeutungen

8.4 Genderspezifische Auswertung

Die Mädchen schneiden bei der Untersuchung etwas schlechter ab als die Jungen (vgl. Abb. 8.2). Auf die gesamte Untersuchung bezogen ist der Unterschied mit 74,8% richtigen Termdeutungen bei den Mädchen und 79,0% bei den Jungen jedoch nicht signifikant. Das gleiche gilt für die Betrachtung der Subtraktionsaufgaben, wo die Schülerinnen zu 64,2% richtige Antworten gaben und die Schüler zu 66,9%. Der Unterschied bei den Additionsaufgaben (85,4% vs. 91,1%) ist dagegen signifikant ($p = 0{,}030$; $\chi^2 = 4{,}707$).

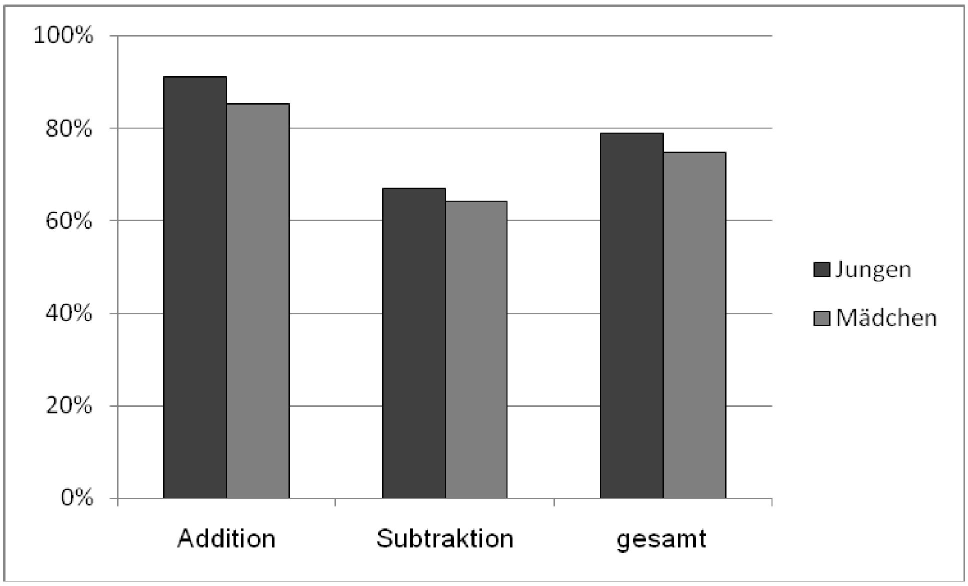


Abb. 8.2: Genderspezifische Auswertung, Anteil korrekter Termdeutungen

8.5 Vergleich der Schulorte

Bei den Additionsaufgaben sind die Schüler aus Schule 3 (98,5% korrekte Übersetzungen), Schule 6 (97,6%) und Schule 1 (93,3%) besser als der Durchschnitt (88,8%). Die Ergebnisse aus Schule 5 sind mit 85,2% richtiger Übersetzungen etwas, die aus Schule 2 mit 73,6% deutlich schlechter als der Durchschnitt.[82]

[82] Wie bereits angemerkt wird darauf verzichtet, die Ergebnisse aus Schule 4 mit einzubeziehen, da hier lediglich eine Schülerin untersucht werden konnte; ihre Ergebnisse liegen sowohl bei der Addition als auch bei der Subtraktion über dem Durchschnitt.

Während die Schüler aus Schule 1 (75,8%) und Schule 6 (75,0%) bei den Subtraktionsaufgaben ebenfalls besser als der Durchschnitt sind (65,8%), erzielen die aus Schule 3 mit 65,1% einen leicht unterdurchschnittlichen Wert. Die Schüler aus Schule 5 erreichen wieder einen etwas schlechteren Wert (60,2%) als der Durchschnitt, die aus Schule 2 erneut einen deutlich schlechteren Wert (55,5%).

Dementsprechend erreichen die Schüler aus Schule 6, 1 und 3 im Gesamten einen höheren Anteil korrekter Termdeutungen (86,3% / 84,6% / 81,8%) als der Durchschnitt (77,3%) und die aus Schule 5 (72,7%) einen etwas niedrigeren, die Schüler aus Schule 2 einen deutlich niedrigeren Anteil (64,6%). Der Anteil richtiger Deutungen liegt bei den Schülern in Schule 2 bei jeder der 24 Aufgaben unter dem Durchschnitt.

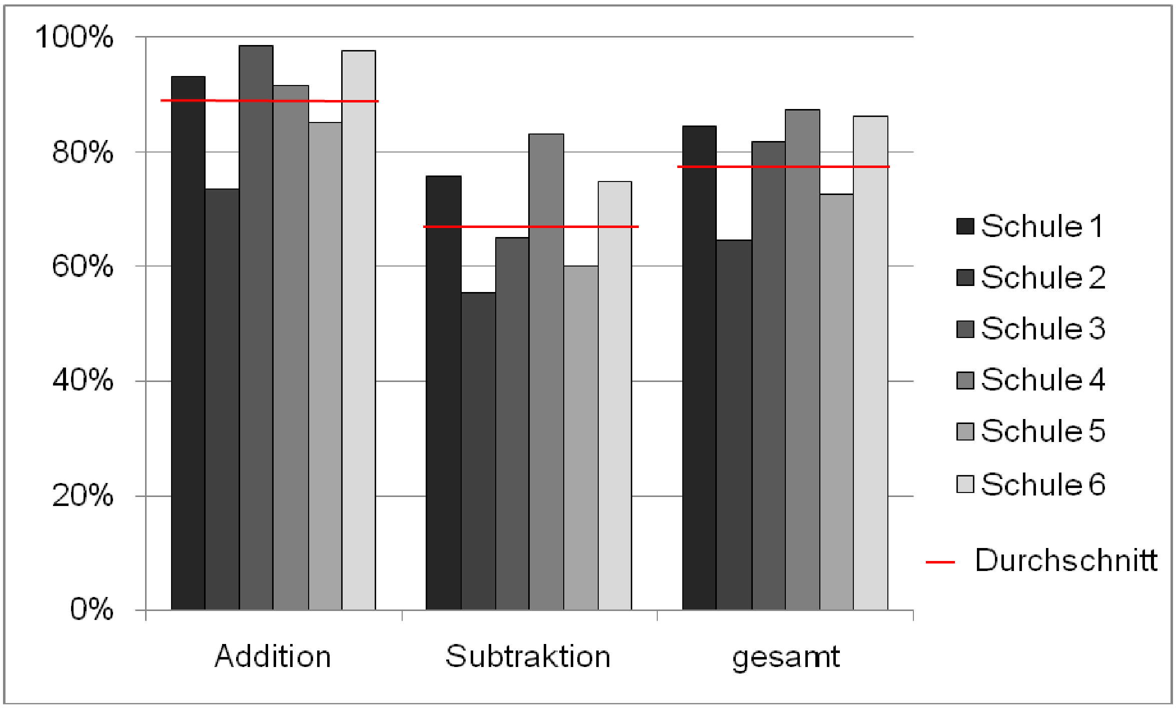


Abb. 8.3: Vergleich der Schulorte, Anteil korrekter Termdeutungen

Bezüglich der Deutung der Subtraktionsaufgaben[83] im Sinne des Teile-Ganzes-Konzepts können ebenfalls Unterschiede festgestellt werden. Mit Abstand am häufigsten werden die Darstellungen von den Schülern aus Schule 1 in diesem Sinne interpretiert (46,3%; entspricht 61,7% der richtigen Lösungen). Während ein Viertel (25,0%) der Antworten der Schüler aus Schule 2 dem Teile-Ganzes-Konzept entsprechen, macht dies aufgrund des allgemein niedrigeren Anteils richtiger Lösungen einen Anteil von 44,5% der richtigen Lösungen aus. In Schule 6 beträgt der Anteil 26,8% (entspr. 39,5% der richtigen Lösungen), in Schule 5 22,2% (entspr. 32,6%) und in Schule 3 17,1% (entspr. 25,9%).[84]

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass sich der Anteil der korrekten Termdeutungen zwischen den Schulen um über 20 Prozentpunkte unterscheidet. Es stellt sich die Frage, wie dieser gravierende Unterschied zustande kommt. Mögliche Ursachen könnten in verschiedenen Bereichen vermutet werden.

Ein Bedingungsfaktor könnte die Lehrkraft und deren Unterricht sein – wie gestaltet sie den Mathematikunterricht, wie war die Lehrerausbildung, unterrichtet sie fachfremd oder hat sie Mathematik studiert, welches Material wird im Unterricht eingesetzt, welchen Stellenwert hat das Übersetzen zwischen den unterschiedlich Repräsentationsebenen – hier insbesondere von der ikonischen zur symbolischen, gab es einen Lehrerwechsel, usw.

Ein weiterer möglicher Bedingungsfaktor könnte das Schülerklientel darstellen – wie sind die kognitiven und affektiven Voraussetzungen, wie sind die Wahrnehmungs- und Konzentrationsleistungen, wie hoch ist der Anteil der Schüler mit Migrationshintergrund, usw.

Ebenfalls ist es möglich, dass die Durchführung der Untersuchung einen Einfluss auf die Ergebnisse hat. Es wurde versucht, die Untersuchung in allen Klassen möglichst gleich durchzuführen, dennoch könnte hiermit unter Umständen ein Teil der Varianz begründet werden.

[83] Aufgabe 1s, 2s, 5s, 6s, 9s, 10s, 11s und 12s; bei Aufgabe 3s, 4s, 7s und 8s ist eine Kategorisierung nicht möglich (vgl. Kap. 8.3.1).
[84] Die Schülerin aus Schule 4 interpretiert keine der acht Aufgaben im Sinne des Teile-Ganzes-Konzepts.

8.6 Zusammenfassung der Ergebnisse

Additionsaufgaben sind deutlich weniger fehleranfällig und eindeutiger als Subtraktionsaufgaben. Die Farbgebung sowie die räumliche Versetzung haben sowohl bei der Addition als auch bei der Subtraktion Auswirkungen auf die Fehleranfälligkeit und die Eindeutigkeit (weniger fehleranfällig und eindeutiger sind einfarbige bzw. räumlich versetzte Darstellungen). Bei der Subtraktion ist die Präsentation als Abfolge verschiedener „Bilder“ fehleranfälliger als dynamische oder statische Präsentationsformen. Im Vergleich zur linearen Anordnung ist die Anordnung im Block weniger fehleranfällig.

Über Dreiviertel (77,3%) aller Antworten[85] sind korrekte Termdeutungen. Relativ hoch ist mit 13,6% der Anteil falscher oder nicht nachvollziehbarer Termdeutungen. Unvollständige oder fehlende Termdeutungen (4,2%) sowie problematische Termdeutungen (3,0%) kommen seltener vor. 98% der Kinder haben symbolische Terme notiert, ein Kind (2%) hat anhand einer Mischung aus ikonischer und symbolischer Schreibweise die Aufgaben notiert.

Bei der Addition überwiegt das Teile-Ganzes-Verständnis in den richtigen Antworten. Größere Unterschiede treten bei der Subtraktion auf. Eine Deutung nach dem Teile-Ganzes-Verständnis überwiegt lediglich bei zwei Aufgaben, bei den anderen Aufgaben ermittelt die Mehrzahl der korrekt antwortenden Schüler den Unterschied zwischen den Anzahlen.

Die Mädchen erreichen in der Untersuchung etwas schlechtere Werte als die Jungen.

Der Anteil der korrekten Termdeutungen variiert zwischen den Schulen stark. Unterschiede gibt es ebenfalls bezüglich der Häufigkeit von Deutungen der Subtraktionsaufgaben im Sinne des Teile-Ganzes-Konzepts.

[85] Damit gemeint sind ebenfalls unvollständige oder keine Termdeutungen.

9. Folgerungen

Aus den gewonnenen Ergebnissen können Folgerungen für die Unterrichtspraxis gezogen werden.

Bei der Gestaltung von Arbeitsblättern empfiehlt es sich, sowohl bei Additions- als auch bei Subtraktionsaufgaben einfarbige Darstellungen mit räumlicher Versetzung zu wählen, da diese am wenigsten fehleranfällig sind.

Um mit den Schülern im Unterricht ins Gespräch darüber zu kommen, welche unterschiedlichen Aufgaben zu einer Darstellung passen, können auch zweifarbige Darstellungen genutzt werden, da diese zu weiteren Deutungen anregen. Im Gespräch sollte jedoch darauf geachtet werden, dass alle Deutungen, auch falsche, aufgenommen und zur Diskussion gestellt werden. Fehlerhafte Deutungen bergen häufig ein großes Potential, da sie auf Problembereiche aufmerksam machen, die im Anschluss gemeinsam geklärt werden können (z.B. bei „2 – 5 = 3“; vgl. Kap. 8.3.3).

Allgemein ist die Blockanordnung zu empfehlen, da sie leichter zu erfassen ist und es seltener zu Zählfehlern kommt. Wenn die lineare Anordnung bei größeren Zahlen gewählt wird, sollten Zehnerfelder oder Zehnerstreifen[86] als Strukturierungshilfe genutzt werden. Die Verwendung von Zehnerfeldern erscheint ohnehin als ratsam, da die Schüler hier auf einen Blick[87] die Anzahlen erfassen können und nicht abzählen müssen. Dabei kann sowohl die Darstellung mit der Betonung der Fünf sowie die Darstellung mit der Betonung der Verdopplung gewählt werden.

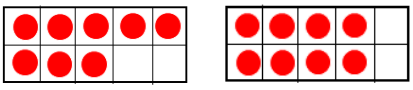


Abb. 9.1: Zehnerfelder

[86] Zehnerstreifen sind ähnlich aufgebaut wie Zehnerfelder; anstatt der unteren Fünferreihe ist diese neben der oberen angeordnet.
[87] Voraussetzung ist die vorangegangene Einführung der Zehnerfelder und der sichere Umgang der Schüler damit. Hinweise zur Einführung des Materials finden sich u.a. bei SCHÄFER 2006, XII/10 ff.

Die Arbeit mit Zehnerfeldern ist auch im Zusammenhang mit dem Teile-Ganzes-Verständnis von großer Bedeutung. Wie oben gezeigt wurde, überwiegen die Deutungen im Sinne des Teile-Ganzes-Konzepts zwar bei der Addition, jedoch nicht bei der Subtraktion. Eine solche Deutung könnte durch die Arbeit mit Zehnerfeldkarten gefördert werden.

10. Forschungsausblick

Bei der vorgestellten Untersuchung wurde lediglich eine der sechs unterschiedlichen Übersetzungsrichtungen zwischen den Repräsentationsebenen (von der ikonischen zur symbolischen Darstellung) überprüft. Interessant wäre gewesen zu überprüfen, wie die untersuchten Kinder umgekehrt die formale Darstellung in die „Materialsprache" übersetzen und ob sich die Übersetzungen einander entsprechen. Aus Zeitgründen musste auf die Überprüfung der Rückübersetzung jedoch verzichtet werden.

Ähnliche Untersuchungen zu allen vier Grundrechenarten sind von Herrn Thomas Royar im Grundschulbereich geplant. Herr Royar wird bezüglich beider Übersetzungsrichtungen Untersuchungen durchführen, um aus den gewonnenen Erkenntnissen Folgerungen für einen adäquaten Einsatz von Anschauungsmitteln zur Unterstützung von Grundvorstellungen und zur Förderung des Operationsverständnisses ziehen zu können.

11. Schlusswort

Ziel meiner wissenschaftlichen Hausarbeit und der in diesem Zusammenhang durchgeführten Untersuchung an sechs Förderschulen mit insgesamt 50 teilnehmenden Schülern war es, kindliche Übersetzungen zwischen ikonischer und symbolischer Darstellung von den Operationen Addition und Subtraktion näher zu betrachten. Aus diesen Betrachtungen sollten Folgerungen für die Unterrichtspraxis geschlossen werden.

Die Ergebnisse der Untersuchungen brachten teilweise signifikante Unterschiede zum Vorschein, aus denen Folgerungen abgeleitet wurden. Es ist jedoch erforderlich, die gefundenen Unterschiede in weiteren Studien zu überprüfen.

Die Durchführung der Untersuchungen war für mich persönlich sehr gewinnbringend. Neben den Ergebnissen der Studie bleiben mir viele positive Eindrücke in Erinnerung. Durch die freundliche und offene Art der beteiligten Lehrerinnen und Schulleiter, insbesondere aber auch durch die Bereitschaft der Kinder, sich auf mich und die Untersuchung vorbehaltlos einzulassen, hat es mir viel Freude bereitet, die Untersuchung durchzuführen.

C Verzeichnisse und Anhang

Literatur- und Quellenverzeichnis

Bönig, D. (1993): Empirische Untersuchungen zum Transfer zwischen verschiedenen medialen Repräsentationen am Beispiel multiplikativer Operationen. In: Lorenz, J.-H. (Hrsg.): Mathematik und Anschauung. Köln: Aulis Verlag, S. 25–30

Bruner, J. / Olver, R. / Greenfield, P. (1971): Studien zur kognitiven Entwicklung. Stuttgart: Ernst Klett Verlag

Gerster, H.-D. / Schultz, R. (2000): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt „Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen". Freiburg im Breisgau: Pädagogische Hochschule Freiburg. Quelle: http://opus.bsz-bw.de/phfr/volltexte/2007/16/ [Stand: 28.04.2008]

Grassmann, Marianne (1998): „Minus ist viel schwerer als plus". Der Subtraktion im Unterricht mehr Aufmerksamkeit schenken. In: Grundschulunterricht 9/1998, S. 12–13

Hafenbrak, B.: Einführung Mathematikdidaktik. Kapitel 4: Didaktische Prinzipien. Skript zur Vorlesung im Wintersemester 2004/05. Quelle: http://mathematik.ph-weingarten.de/~hafenbrak/docs/EinfDid06/Did06_04.pdf [Stand: 26.05.2008]

Homberger, D. (2000): Sachwörterbuch zur Sprachwissenschaft. Stuttgart: Reclam

Klaudt, D. / Wessolowski, S.: Seminar Arithmetik und Sachrechnen. Interdisziplinäres Lehren und Lernen, Anfangsunterricht Mathematik. Skript zur Vorlesung im Wintersemester 2004/05. Institut für Mathematik und Informatik an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg

Krauthausen, G. (1998): Lernen – Lehren – Lehren lernen. Zur mathematik-didaktischen Lehrerbildung am Beispiel der Primarstufe. Leipzig: Klett

Krauthausen, G. / Scherer, P. (2007): Einführung in die Mathematikdidaktik. 3. Auflage. München: Elsevier Spektrum Akademischer Verlag

Landesinstitut für Schulentwicklung (2007): Bildungsplan Förderschule. Stand: Juni 2007. Quelle: www.bildung-staerkt-menschen.de/unterstuetzung/schularten/SoS/FS/BP_Foesch_Juni07.ppt [Stand: 23.06.2008]

Landesinstitut für Schulentwicklung (2008): Bildungsplan Förderschule Baden-Württemberg. Stand: 17. Juni 2008. Quelle: http://www.bildung-staerkt-menschen.de/unterstuetzung/schularten/SoS/FS/ BPFoerderschule_09Maerz07.pdf [Stand: 23.06.2008]

Lorenz, J. (1998): Das Bild – das bessere Bildungsmittel im Mathematikunterricht? In: SWZ 26 (1998) 13, S. 25–35

Moser Opitz, E. (2007): Lernbereich Mathematik. Erstrechnen. In: Heimlich, U. (Hrsg.): Didaktik des Unterrichts im Förderschwerpunkt Lernen: ein Handbuch für Studium und Praxis. Stuttgart: Kohlhammer, S. 253–265

Moser Opitz, E. / Schmassmann, M. (2007): Grundoperationen. In: Heimlich, U. (Hrsg.): Didaktik des Unterrichts im Förderschwerpunkt Lernen: ein Handbuch für Studium und Praxis. Stuttgart: Kohlhammer, S. 266–279

Padberg, F. (2005): Didaktik der Arithmetik. 3. Auflage. Heidelberg: Elsevier Spektrum Akademischer Verlag

Radatz, H. / Schipper, W. (1983): Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel

Radatz, H. / Schipper, W. / Dröge, R. / Ebeling, A. (1996): Handbuch für den Mathematikunterricht. 1. Schuljahr. Hannover: Schroedel

Schäfer, J. (2005): Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule: Lernstand, Einstellungen und Wahrnehmungsleistungen. Eine empirische Studie. Hamburg: Kovač

Schäfer, J. (2006): Wissen, womit man rechnen kann… Zur Entwicklung von Verständnis im Mathematikunterricht. In: PMP Grundschule, II/2006, S. XII/1–XII/16

Schäfer, J. (2007): Rechenstrategien zum Addieren und Subtrahieren im erweiterten Zahlenraum. Seminarunterlagen Wintersemester 2007/08. Pädagogische Hochschule Ludwigsburg, Studienort Reutlingen

Schipper, W. / Hülshoff, A. (1984): Wie anschaulich sind Veranschaulichungshilfen? Zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 10. In: Grundschule 16/1984, Heft 4, S. 54–56

Schütte, S. (1994): Mathematiklernen in Sinnzusammenhängen. Stuttgart: Klett

Söbbeke, E. (2005): Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim, Berlin: Verlag Franzbecker

Statistisches Landesamt Baden-Württemberg (2007): Statistische Berichte Baden-Württemberg. Unterricht und Bildung. Quelle: http://www.statistik.baden-wuerttemberg.de/Veroeffentl/Statistische_Berichte/3231_06001.pdf
[Stand: 04.07.2008]

Van de Walle, J. (2007): Elementary and Middle School Mathematics: teaching developmentally. 6th edition. Boston: Pearson

Voigt, J. (1993): Unterschiedliche Deutungen bildlicher Darstellungen zwischen Lehrerin und Schülern. In: Lorenz, J.-H. (Hrsg.): Mathematik und Anschauung. Köln: Aulis Verlag

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Anhang

Anhang A: Aufgaben der Untersuchung

Anhang B: Ausgewählte Antwortzettel der Schüler

Anhang C: Häufigkeitsauszählung „mit Ergebnis“

Anhang D: Häufigkeitsauszählung „ohne Ergebnis“

Anhang E: Chi-Quadrat-Test

Aufgaben zur Addition

Aufbau „vor den Augen der Kinder“ (dynamisch)

1.) Es werden zuerst drei gelbe und dann fünf blaue, räumlich etwas versetzte Plättchen gelegt (Objekt für Objekt einzeln)

2.) Es werden zuerst sechs rote und dann vier rote, räumlich etwas versetzte Plättchen gelegt

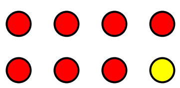
3.) Es werden zuerst vier grüne und dann ein blaues, räumlich nicht versetztes Plättchen gelegt

Alles beim Einschalten des OHP da (statisch)

4.) Beim Einschalten sind zwei grüne und vier gelbe Plättchen sichtbar, räumlich etwas versetzt

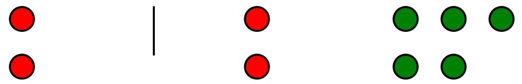
5.) Beim Einschalten sind fünf blaue und vier blaue Plättchen sichtbar, räumlich etwas versetzt

6.) Beim Einschalten sind sieben rote und ein gelbes Plättchen sichtbar, räumlich nicht versetzt

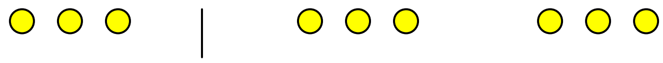


Aufbau mit erstem Summand und sichtbarem „Endergebnis“

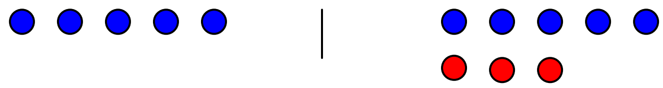
7.) OHP ein: zwei rote Plättchen; OHP aus; OHP ein: zwei rote und fünf grüne Plättchen sind sichtbar, räumlich etwas versetzt



8.) OHP ein: drei gelbe Plättchen; OHP aus; OHP ein: drei gelbe und drei gelbe Plättchen sind sichtbar, räumlich etwas versetzt



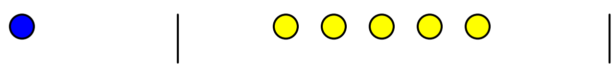
9.) OHP ein: fünf blaue Plättchen; OHP aus; OHP ein: fünf blaue und drei rote Plättchen sind sichtbar, räumlich nicht versetzt



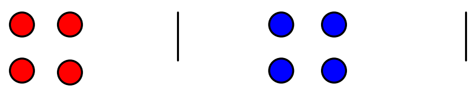
Aufgaben mit einzelnen Summanden, ohne sichtbares „Endergebnis“

10.) OHP ein: vier grüne Plättchen; OHP aus; OHP ein: drei rote Plättchen; OHP aus

11.) OHP ein: ein blaues Plättchen; OHP aus; OHP ein: fünf gelbe Plättchen; OHP aus



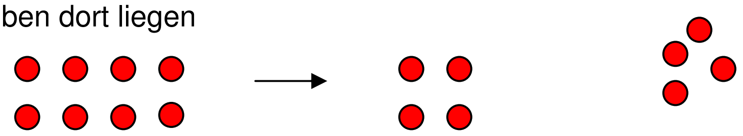
12.) OHP ein: vier rote Plättchen; OHP aus; OHP ein: vier blaue Plättchen; OHP aus



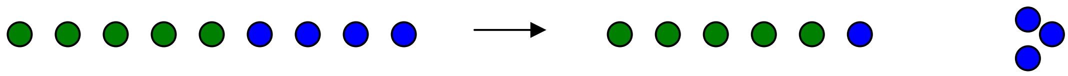
Aufgaben zur Subtraktion

„Vor den Augen der Kinder“, „Subtrahend bleibt sichtbar“ (dynamisch)

1.) Acht rote Plättchen liegen auf OHP; vier davon werden zur Seite geschoben, bleiben dort liegen

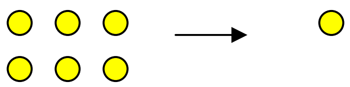


2.) Fünf grüne und vier blaue Plättchen liegen auf OHP; drei blaue Plättchen werden zur Seite geschoben, bleiben dort liegen

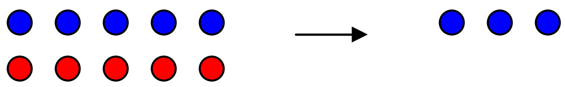


„Vor den Augen der Kinder“, „Subtrahend verschwindet“ (dynamisch)

3.) Sechs gelbe Plättchen liegen auf OHP; fünf davon werden weggenommen

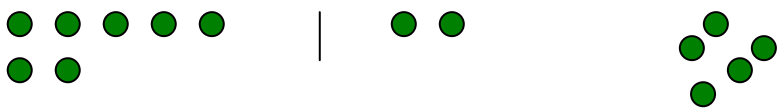


4.) Fünf blaue und fünf rote Plättchen liegen auf OHP; sieben Plättchen werden weggenommen

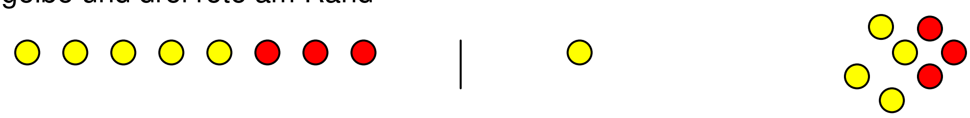


„Unsichtbare“ Veränderung, „Subtrahend bleibt sichtbar“ (dynamisch)

5.) OHP ein: sieben grüne Plättchen; OHP aus; OHP ein: zwei grüne, fünf grüne am Rand

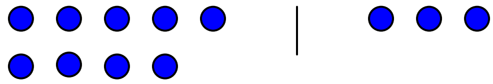


6.) OHP ein: fünf gelbe und drei rote Plättchen; OHP aus; OHP ein: ein gelbes, vier gelbe und drei rote am Rand

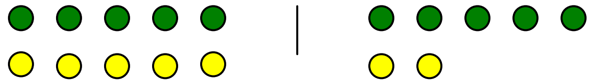


„Unsichtbare“ Veränderung, „Subtrahend verschwindet“ (dynamisch)

7.) OHP ein: neun blaue Plättchen; OHP aus; OHP ein: drei blaue Plättchen

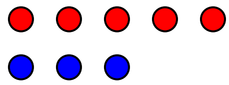


8.) OHP ein: fünf grüne und fünf gelbe Plättchen; OHP aus; OHP ein: fünf grüne und zwei gelbe Plättchen

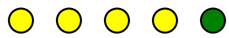


Alles beim Einschalten des OHP da (statisch)

9.) Beim Einschalten sind fünf rote Plättchen und darunter drei blaue Plättchen sichtbar, räumlich nicht versetzt

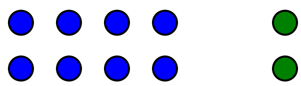


10.) Beim Einschalten sind vier gelbe Plättchen und daneben ein grünes Plättchen sichtbar, räumlich nicht versetzt



11.) Beim Einschalten sind vier rote Plättchen und räumlich etwas versetzt drei rote Plättchen sichtbar

12.) Beim Einschalten sind acht blaue Plättchen und räumlich etwas versetzt zwei grüne Plättchen sichtbar



Name: M Klasse:

1 3+5=8	2 6+4=10	3 4+1=5	4 2+4=6
5 5+4=9	6 7+1=8	7 2+5=7	8 3+3=6
9 5+3=8	10 4+3=7	11 1+5=6	12 4+4=8

1

Name: M Klasse: 3

1 8-4=4	2 9-3=6	3 6-4=1	4 10-7=3
5 7-5=2	6 8-7=1	7 9-6=3	8 10-3=7
9 8-6=2	10 5-4=1	11 7-3=4	12 10-2=8

1

Name: J Klasse: 3

1 3+5=8	2 6+4=10	3 4+1=5	4 2+4=8
5 5+4=9	6 7+1=8	7 2+5=10	8 3+3=6
9 5+3=8	10 4+3=7	11 1+5=6	12 4+4=8

6

Name: J Klasse: 3

1 4−4=0	2 5−4=1	3 6−1=5	4 3−0=3
5 5−2=3	6 5−3=2	7 9−3=6	8 5−2=3
9 5−3=2	10 4−1=3	11 4−3=1	12 8−2=6

6

Name: A Klasse: 3

1 3+5=8	2 6+4=10	3 4+1=5	4 2+4=6
5 5+4=9	6 7+1=8	7 2+5=7	8 3+3=6
9 5+3=8	10 ~~2~~ 2+1=3,	11 0+1=1	12 2+2=4

16

Name: A Klasse: 3

1 4-4=4	2 6-3=3	3 0-1=1	4
5 2-5=3	6 ~~1-7=~~	7	8 9-7=
9 8-5=4	10 7	11	12 7

Name: T Klasse: 3-4

1 oo o + ooo oo = 8	2 ooo ooo + oo oo = 10	3	4 oo + oooo = 6
5 ooo oo + oo oo = 9	6 ooo ooo + o = 7	7 o o + ooo oo = 7	8 ooo + ooo = 6
9 ooooo + ooo = 8	10 oo oo + oo o = 7	11 o + ooooo = 6	12 oo oo + oo oo = 8

17

Name: T Klasse: 3-4

1 oo oo − oo oo = 0	2 ooooo − oo o = 2	3 ooo ooo − o = 5	4 ooooo oooooo − oo 7 = o
5 oooooo oo − = 7	6 oooooooooo − 7 = o	7 ooooo ooo − oo o = 8	8 ooooo ooooo − ooooooo = ooo
9 ooooo oooo − = oooo oooo	10 oooo o − ooo oo = 10	11 oooo − oo o = o	12 oooo oooo − o o = ooooo

17

P.

Name: Klasse: 3

1 3+5=8	2 6+4=9	3 4+1=5	4 2+4=6
5 5+4=9	6 7+1=8	7 2+5=7	8 3+3=12
9 5+3=8	10 4+3=8	11 1+5=6	12 4+4=8

24

Name: P. Klasse: 3

1 4-4=0	2 6-3=3	3 6-1=5	4 10-3=7
5 7-5=2	6 1-7=6	7 9-3=6	8 10-7=3
9 8-1=7	10 6-2=?	11 4-3=1	12 8-2=6

24

Name: M Klasse: 3

1 3+5=8	2 6+4=10	3 4+1=5	4 2+4=6
5 5+4=9	6 7+1=8	7 2+5=7	8 3+3=6
9 5+3=8	10 4+3=7	11 1+5=6	12 4+4=8

28

Name: M Klasse: 3

1 8-4=4	2 6-3=3	3 6-5=1	4 10-7=3
5 7-5=2	6 8-7=1	7 9-6=3	8 10-3=7
9 8-3=5	10 5-5=0	11 4-3=1	12 8-2=6

28

Name: G Klasse: M1

1 3+5=8	2 6+4=10	3 5+0=5	4 2+4=6
5 5+4=9	6 7+1=8	7 2+5=7	8 3+3=6
9 5+3=8	10 4+3=7	11 1+5=6	12 4+4=8

34

Name: G Klasse: M1

1 4-4=4	2 6-3=3	3 6-1=5	4 10-3=7
5 2-5=3	6 7-7=6	7 9-3=6	8 10-7=3
9 5-3=2	10 4-1=3	11 4-3=2	12 8-2=6

34

Name: S Klasse: 3

1 3+5=8	2 6+4=10	3 2+3=5	4 2+4=6
5 5+4=9	6 4+4=8	7 2+5=7	8 3+3=6
9 5+3=8	10 1+2=3	11 1+4=5	12 2+2=4

39

Name: S Klasse: 3

1 8−4=4	2 9−3=6	3 1−0=1	4 10−7=3
5 7−5=2	6 8−1=7	7 9−6=3	8 10−3=7
9 9−1=8	10 5−3=2	11 6−3=3	12 10−2=8

39

Name: S Klasse: 3.6

1 3+5=8	2 6+4=10	3 4+1=5	4 2+4=6
5 5+4=9	6 7+1=8	7 ~~2~~1+5=7	8 3+3=6
9 5+3=8	10 4+3=7	11 1+5=6	12 4+4=8

40

Name: S Klasse: 3

1 4−4=0	2 5−4=1	3 6−1=5	4 5−3=2
5 7−7=0	6 5−3=2 ~~5−3=2~~	7 9−3=6	8 5−5=0
9 5−3=2	10 4−1=5	11 4−3=1	12 8−2=6

41

Name: D Klasse: U2

1 5+3=8	2 6+4=10	3 4+1=5	4 2+4=6
5 4+5=9	6 1+6=7	7 5+2=7	8 3+3=6
9 5+3=8	10 4+3=7	11 1+5=6	12 4+4=8

45

Name: D Klasse: U2

1 8-4=4	2	3 6-5=1	4
5 7-5=2	6 7-6=1	7 9-6=3	8 10-3=7
9	10	11	12

45

Name: L Klasse: U1

1 3+5=8	2 6+4 =10	3 4+1=5	4 2+4=6
5 5+4=9	6 7+1=8	7 2+5=7	8 3+3=6
9 5+3=8	10 4+3=7	11 1+5=6	12 4+4=6

50

Name: L Klasse: U1

1 4-4=0	2 6-3=3	3 6-1=5	4 ~~10+~~-3=7
5 ~~79~~2-5= 0	6 8+1-7 0	7 9-3=6	8 10-7=2
9 8-3=2	10 4-1=3	11 4-3=1	12 8-2=6

50

Häufigkeitsauszählung „mit Ergebnis“

1) Aufg. 1a

3+5=8	41	(82%)
5+3=8	1	(2%)
3+8=11	1	(2%)
7+2=9	1	(2%)
1+1=2	1	(2%)
3+5=7	1	(2%)
3+4=8	2	(4%)
8+35=8	1	(2%)
kein Ergebnis	0	(0%)
unvollständig	0	(0%)
keine Antwort	0	(0%)
Zeichnung	1	(2%)

2) Aufg. 2a

6+4=10	44	(88%)
10+10=20	1	(2%)
6+4=9	2	(4%)
6+4=8	1	(2%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	0	(0%)
keine Antwort	0	(0%)
Zeichnung	1	(2%)

3) Aufg. 3a

4+1=5	39	(78%)
5+0=5	4	(8%)
3+2=5	2	(4%)
2+3=5	1	(2%)
5-1=4	1	(2%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	0	(0%)
keine Antwort	2	(4%)
Zeichnung	0	(0%)

4) Aufg. 4a

2+4=6	45	(90%)
2+4=7	1	(2%)
2+4=8	1	(2%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	0	(0%)
keine Antwort	1	(2%)
Zeichnung	1	(2%)

5) Aufg. 5a

5+4=9	46	(92%)
4+5=9	1	(2%)
5+4=8	1	(2%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	0	(0%)
keine Antwort	0	(0%)
Zeichnung	1	(2%)

6) Aufg. 6a

7+1=8	37	(74%)
8+0=8	2	(4%)
4+4=8	3	(6%)
5+1=6	1	(2%)
1+6=7	1	(2%)
7+4=11	1	(2%)
8-1=7	1	(2%)
7+1=7	1	(2%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	0	(0%)
keine Antwort	1	(2%)
Zeichnung	1	(2%)

7) Aufg. 7a

2+5=7	45	(90%)
5+2=7	1	(2%)
2+5=6	1	(2%)
2+5=10	1	(2%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	0	(0%)
keine Antwort	0	(0%)
Zeichnung	1	(2%)

8) Aufg. 8a

3+3=6	45	(90%)
3+0=3	1	(2%)
2+1=3	1	(2%)
3+3=12	1	(2%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	0	(0%)
keine Antwort	0	(0%)
Zeichnung	1	(2%)

9) Aufg. 9a

5+3=8	44	(88%)
5+8=13	1	(2%)
2+6=8	1	(2%)
3+3=6	1	(2%)
7+3=9	1	(2%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	0	(0%)
keine Antwort	0	(0%)
Zeichnung	1	(2%)

10) Aufg. 10a

4+3=7	40	(80%)
2+1=3	2	(4%)
1+2=3	1	(2%)
5+3=8	1	(2%)
4-1=3	2	(4%)
4+3=8	1	(2%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	1	(2%)
keine Antwort	0	(0%)
Zeichnung	1	(2%)

11) Aufg. 11a

1+5=6	39	(78%)
1+4=5	3	(6%)
4+1=5	1	(2%)
2+2=4	1	(2%)
0+1=1	1	(2%)
1+5=1	1	(2%)
1+5=5	1	(2%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	1	(2%)
keine Antwort	0	(0%)
Zeichnung	1	(2%)

12) Aufg. 12a

4+4=8	42	(84%)
2+2=4	3	(6%)
2+1=3	1	(2%)
4+4=6	1	(2%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	1	(2%)
keine Antwort	0	(0%)
Zeichnung	1	(2%)

13) Aufg. 1s

8-4=4	16	(32%)
4-4=0	22	(44%)
6-4=2	1	(2%)
7-4=3	1	(2%)
6-4=4	1	(2%)
4-4=4	6	(12%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	1	(2%)
keine Antwort	0	(0%)
Zeichnung	1	(2%)

14) Aufg. 2s

9-3=6	8	(16%)
9-6=3	1	(2%)
6-3=3	20	(40%)
5-4=1	5	(10%)
5-3=2	5	(10%)
8-3=5	1	(2%)
6-4=2	1	(2%)
8-3=6	3	(6%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	0	(0%)
keine Antwort	4	(8%)
Zeichnung	1	(2%)

15) Aufg. 3s

6-5=1	18	(36%)
6-1=5	21	(42%)
6-4=2	1	(2%)
6-2=4	1	(2%)
1-1=0	1	(2%)
1-0=1	1	(2%)
6-4=1	1	(2%)
0-1=1	1	(2%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	0	(0%)
keine Antwort	3	(6%)
Zeichnung	1	(2%)

16) Aufg. 4s

10-7=3	13	(26%)
10-3=7	9	(18%)
3-0=3	1	(2%)
5-5=0	1	(2%)
5-1=4	1	(2%)
5-3=2	12	(24%)
3-1=2	1	(2%)
12-3=9	1	(2%)
10-6=4	1	(2%)
9-6=3	1	(2%)
9-7=3	1	(2%)
5-7=2	1	(2%)
1-7=3	1	(2%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	0	(0%)
keine Antwort	4	(8%)
Zeichnung	1	(2%)

17) Aufg. 5s

7-5=2	20	(40%)
7-2=5	4	(8%)
7-2-5=0	1	(2%)
5-2=3	2	(4%)
7-7=0	4	(8%)
7-4=3	1	(2%)
6-2=4	1	(2%)
2-5=3	9	(18%)
7-2=2	1	(2%)
7-2=7	1	(2%)
7-1=0	1	(2%)
7-1=7	1	(2%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	0	(0%)
keine Antwort	2	(4%)
Zeichnung	1	(2%)

18) Aufg. 6s

8-7=1	16	(32%)
8-1=7	4	(8%)
8-1-7=0	2	(4%)
5-3=2	5	(10%)
5-1=4	1	(2%)
7-6=1	2	(4%)
7-1=6	1	(2%)
8-8=0	2	(4%)
6-1=5	1	(2%)
7-7=1	1	(2%)
7-1=1	1	(2%)
5-3=8	1	(2%)
1-7=6	6	(12%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	0	(0%)
keine Antwort	5	(10%)
Zeichnung	1	(2%)

19) Aufg. 7s

9-6=3	11	(22%)
9-3=6	25	(50%)
8-5=3	1	(2%)
8-3=5	1	(2%)
7-4=3	1	(2%)
7-3=4	1	(2%)
5-4=1	1	(2%)
9-3=7	1	(2%)
9-3=3	1	(2%)
3-9=6	2	(4%)
3-8=5	1	(2%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	0	(0%)
keine Antwort	2	(4%)
Zeichnung	1	(2%)

20) Aufg. 8s

10-3=7	12	(24%)
10-7=3	12	(24%)
7-3=4	1	(2%)
7-2=5	1	(2%)
5-5=0	4	(8%)
5-2=3	4	(8%)
10-2=8	1	(2%)
10-5=5	1	(2%)
10-6=4	1	(2%)
9-2=7	1	(2%)
9-7=2	2	(4%)
10-7=2	1	(2%)
10-7=4	2	(4%)
10-6=6	1	(2%)
10-2=3	1	(2%)
10-3=12	1	(2%)
9-7=1	1	(2%)
kein Ergebnis	2	(4%)
unvollständig	0	(0%)
keine Antwort	0	(0%)
Zeichnung	1	(2%)

21) Aufg. 9s

8-3=5	6	(12%)
8-5=3	3	(6%)
5-3=2	17	(34%)
8-4=4	1	(2%)
8-0=8	3	(6%)
8-6=2	1	(2%)
8-1=7	1	(2%)
7-4=3	1	(2%)
9-3=6	1	(2%)
9-1=8	1	(2%)
10-2=8	1	(2%)
5-3=8	1	(2%)
8-5=4	1	(2%)
7-3=5	1	(2%)
7-8=2	1	(2%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	3	(6%)
keine Antwort	5	(10%)
Zeichnung	1	(2%)

22) Aufg. 10s

5-1=4	5	(10%)
5-4=1	3	(6%)
4-1=3	20	(40%)
4-3=1	1	(2%)
5-3=2	1	(2%)
5-0=5	2	(4%)
5-5=0	2	(4%)
6-0=6	1	(2%)
6-4=2	1	(2%)
3-2=1	1	(2%)
10-5=5	1	(2%)
4-1=5	2	(4%)
5-6=1	1	(2%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	5	(10%)
keine Antwort	2	(4%)
Zeichnung	1	(2%)

23) Aufg. 11s

7-3=4	8	(16%)
4-3=1	27	(54%)
4-4=0	1	(2%)
7-0=7	1	(2%)
7-5=2	1	(2%)
6-3=3	1	(2%)
6-2=4	1	(2%)
4-3=7	2	(4%)
4-3=2	2	(4%)
kein Ergebnis	1	(2%)
unvollständig	0	(0%)
keine Antwort	4	(8%)
Zeichnung	1	(2%)

24) Aufg. 12s

10-2=8	6	(12%)
8-2=6	33	(66%)
7-2=5	1	(2%)
5-5=0	2	(4%)
10-10=0	1	(2%)
8-2=10	1	(2%)
kein Ergebnis	2	(4%)
unvollständig	1	(2%)
keine Antwort	2	(4%)
Zeichnung	1	(2%)

25) Schulort

Schule 1	10	(20%)
Schule 2	12	(24%)
Schule 3	11	(22%)
Schule 4	1	(2%)
Schule 5	9	(18%)
Schule 6	7	(14%)

26) Schüler Nr.

1 – 50

27) Geschlecht

männlich	30	(60%)
weiblich	20	(40%)

Häufigkeitsauszählung „ohne Ergebnis

1) Aufg. 1a

3+5	42	(84%)
5+3	1	(2%)
3+8	1	(2%)
7+2	1	(2%)
1+1	1	(2%)
3+4	2	(4%)
8+35	1	(2%)
sonstiges	1	(2%)

2) Aufg. 2a

6+4	47	(94%)
10+10	1	(2%)
10+3	1	(2%)
sonstiges	1	(2%)

3) Aufg. 3a

4+1	39	(78%)
5+0	4	(8%)
3+2	2	(4%)
2+3	1	(2%)
5-1	1	(2%)
5+3	1	(2%)
sonstiges	2	(4%)

4) Aufg. 4a

2+4	47	(94%)
6+2	1	(2%)
sonstiges	2	(4%)

5) Aufg. 5a

5+4	47	(94%)
4+5	1	(2%)
9+2	1	(2%)
sonstiges	1	(2%)

6) Aufg. 6a

7+1	38	(76%)
8+0	2	(4%)
4+4	3	(6%)
5+1	1	(2%)
1+6	1	(2%)
7+4	1	(2%)
8-1	1	(2%)
8+2	1	(2%)
sonstiges	2	(4%)

7) Aufg. 7a

2+5	47	(94%)
5+2	1	(2%)
2+2	1	(2%)
sonstiges	1	(2%)

8) Aufg. 8a

3+3	46	(92%)
3+0	1	(2%)
2+1	1	(2%)
3+6	1	(2%)
sonstiges	1	(2%)

9) Aufg. 9a

5+3	45	(90%)
5+8	1	(2%)
2+6	1	(2%)
3+3	1	(2%)
7+3	1	(2%)
sonstiges	1	(2%)

10) Aufg. 10a

4+3	41	(82%)
2+1	2	(4%)
1+2	1	(2%)
5+3	1	(2%)
4-1	2	(4%)
4+7	1	(2%)
sonstiges	2	(4%)

11) Aufg. 11a

1+5	41	(82%)
1+4	4	(8%)
4+1	1	(2%)
2+2	1	(2%)
0+1	1	(2%)
sonstiges	2	(4%)

12) Aufg. 12a

4+4	43	(86%)
2+2	3	(6%)
2+1	1	(2%)
3+4	1	(2%)
sonstiges	2	(4%)

13) Aufg. 1s

8-4	16	(32%)
4-4	29	(58%)
6-4	2	(4%)
7-4	1	(2%)
sonstiges	2	(4%)

14) Aufg. 2s

9-3	8	(16%)
9-6	1	(2%)
6-3	21	(42%)
5-4	5	(10%)
5-3	5	(10%)
8-3	4	(8%)
6-4	1	(2%)
sonstiges	5	(10%)

15) Aufg. 3s

6-5	18	(36%)
6-1	21	(42%)
6-4	2	(4%)
6-2	1	(2%)
1-1	1	(2%)
1-0	1	(2%)
0-1	1	(2%)
1-6	1	(2%)
sonstiges	4	(8%)

16) Aufg. 4s

10-7	13	(26%)
10-3	10	(20%)
3-0	1	(2%)
5-5	1	(2%)
5-1	1	(2%)
5-3	12	(24%)
3-1	1	(2%)
12-3	1	(2%)
10-6	1	(2%)
9-6	1	(2%)
9-7	1	(2%)
5-7	1	(2%)
1-7	1	(2%)
sonstiges	5	(10%)

17) Aufg. 5s

7-5	20	(40%)
7-2	6	(12%)
7-2-5	1	(2%)
5-2	2	(4%)
7-7	4	(8%)
7-4	1	(2%)
6-2	1	(2%)
2-5	9	(18%)
7-1	2	(4%)
2-8	1	(2%)
sonstiges	3	(6%)

18) Aufg. 6s

8-7	17	(34%)
8-1	4	(8%)
8-1-7	2	(4%)
5-3	6	(12%)
5-1	1	(2%)
7-6	2	(4%)
7-1	2	(4%)
8-8	2	(4%)
6-1	1	(2%)
7-7	1	(2%)
1-7	6	(12%)
sonstiges	6	(12%)

19) Aufg. 7s

9-6	11	(22%)
9-3	28	(56%)
8-5	1	(2%)
8-3	1	(2%)
7-4	1	(2%)
7-3	1	(2%)
5-4	1	(2%)
3-9	2	(4%)
3-8	1	(2%)
sonstiges	3	(6%)

20) Aufg. 8s

10-3	13	(26%)
10-7	16	(32%)
7-3	1	(2%)
7-2	1	(2%)
5-5	4	(8%)
5-2	4	(8%)
10-2	2	(4%)
10-5	1	(2%)
10-6	2	(4%)
9-2	1	(2%)
9-7	4	(8%)
sonstiges	1	(2%)

21) Aufg. 9s

8-3	6	(12%)
8-5	5	(10%)
5-3	18	(36%)
8-4	1	(2%)
8-0	3	(6%)
8-6	1	(2%)
8-1	1	(2%)
7-4	1	(2%)
9-3	1	(2%)
9-1	1	(2%)
10-2	1	(2%)
7-3	1	(2%)
7-8	1	(2%)
sonstiges	9	(18%)

22) Aufg. 10s

5-1	5	(10%)
5-4	3	(6%)
4-1	22	(44%)
4-3	1	(2%)
5-3	2	(4%)
5-0	2	(4%)
5-5	2	(4%)
6-0	1	(2%)
6-4	1	(2%)
3-2	1	(2%)
10-5	1	(2%)
5-6	1	(2%)
sonstiges	8	(16%)

23) Aufg. 11s

7-3	8	(16%)
4-3	31	(62%)
4-4	1	(2%)
7-0	1	(2%)
7-5	1	(2%)
6-3	1	(2%)
6-2	1	(2%)
7-2	1	(2%)
sonstiges	5	(10%)

24) Aufg. 12s

10-2	7	(14%)
8-2	34	(68%)
7-2	1	(2%)
5-5	3	(6%)
10-10	1	(2%)
sonstiges	4	(8%)

25) Schulort

Schule 1	10	(20%)
Schule 2	12	(24%)
Schule 3	11	(22%)
Schule 4	1	(2%)
Schule 5	9	(18%)
Schule 6	7	(14%)

26) Schüler Nr.

1 – 50

27) Geschlecht

männlich	30	(60%)
weiblich	20	(40%)

Chi-Quadrat-Test

	Addition		Subtraktion	
Aufgaben	a1-12		s1-12	
einzelne Prozentwerte / Durchschnitt (in %)	86, 94, 78, 94, 96, 76, 96, 94, 92, 82, 92, 86	88,83	90, 60, 78, 46, 56, 42, 78, 58, 62, 60, 78, 82	65,83
Anzahl richtig / Anzahl falsch	533	67	395	205
Chi²-Wert	90,536			
Zweiseitige Signifikanz	< 0,001*** – sehr signifikant			

Addition

Aufbau

	dynamisch		statisch	
Aufgaben	1 - 3		4 - 6	
einzelne Prozentwerte / Durchschnitt (in %)	86, 94, 78	86	94, 96, 76	88,67
Anzahl richtig / Anzahl falsch	129	21	133	17
Chi²-Wert	0,482			
Zweiseitige Signifikanz	0,487 – nicht signifikant			

	dynamisch		Abfolge verschiedener „Bilder“	
Aufgaben	1 - 3		7 - 12	
einzelne Prozentwerte / Durchschnitt (in %)	86, 94, 78	86	96, 94, 92, 82, 92, 86	90,33
Anzahl richtig / Anzahl falsch	129	21	271	29
Chi²-Wert	1,901			
Zweiseitige Signifikanz	0,168 – nicht signifikant			

	statisch		Abfolge verschiedener „Bilder“	
Aufgaben	4 - 6		7 - 12	
einzelne Prozentwerte / Durchschnitt (in %)	94, 96, 76	88,67	96, 94, 92, 82, 92, 86	90,33
Anzahl richtig / Anzahl falsch	133	17	271	29
Chi²-Wert	0,303			
Zweiseitige Signifikanz	0,582 – nicht signifikant			

	sichtbares Endergebnis		ohne sichtbares Endergebnis	
Aufgaben	1 - 9		10 - 12	
einzelne Prozentwerte / Durchschnitt (in %)	86, 94, 78, 94, 96, 76, 96, 94, 92	89,56	82, 92, 86	86,67
Anzahl richtig / Anzahl falsch	403	47	130	20
Chi^2-Wert	0,946			
Zweiseitige Signifikanz	0,331 – nicht signifikant			

Farbgebung

	einfarbig		zweifarbig	
Aufgaben	2, 5, 8		1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12	
einzelne Prozentwerte / Durchschnitt (in %)	94, 96, 94	94,67	86, 78, 94, 76, 96, 92, 82, 92, 86	86,89
Anzahl richtig / Anzahl falsch	142	8	391	59
Chi^2-Wert	6,861			
Zweiseitige Signifikanz	0,009** – sehr signifikant			

räumliche Anordnung

	Blockanordnung		lineare Anordnung	
Aufgaben	1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 12		3, 4, 8, 11	
einzelne Prozentwerte / Durchschnitt (in %)	86, 94, 96, 76, 96, 92, 82, 86	88,5	78, 94, 94, 92	89,5
Anzahl richtig / Anzahl falsch	354	46	179	21
Chi^2-Wert	0,134			
Zweiseitige Signifikanz	0,714 – nicht signifikant			

	räumlich versetzt		räumlich nicht versetzt	
Aufgaben	1, 2, 4, 5, 7, 8		3, 6, 9	
einzelne Prozentwerte / Durchschnitt (in %)	86, 94, 94, 96, 96, 94	93,33	78, 76, 92	82
Anzahl richtig / Anzahl falsch	280	20	123	27
Chi²-Wert	13,732			
Zweiseitige Signifikanz	< 0,001*** – sehr signifikant			

Aufgabe

	größerer Summand an 1. Stelle		kleinerer Summand an 1. Stelle	
Aufgaben	2, 3, 5, 6, 9, 10		1, 4, 7, 11	
einzelne Prozentwerte / Durchschnitt (in %)	94, 78, 96, 76, 92, 82	86,33	86, 94, 96, 92	92
Anzahl richtig / Anzahl falsch	259	41	184	16
Chi²-Wert	3,815			
Zweiseitige Signifikanz	0,051 – nicht signifikant			

	unterschiedliche Summanden		gleiche Summanden	
Aufgaben	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11		8, 12	
einzelne Prozentwerte / Durchschnitt (in %)	86, 94, 78, 94, 96, 76, 96, 92, 82, 92	88,6	94, 86	90
Anzahl richtig / Anzahl falsch	443	57	90	10
Chi²-Wert	0,165			
Zweiseitige Signifikanz	0,685 – nicht signifikant			

Subtraktion

Aufbau

	dynamisch		statisch	
Aufgaben	1 - 4		9 - 12	
einzelne Prozentwerte / Durchschnitt (in %)	90, 60, 78, 46	68,5	62, 60, 78, 82	70,5
Anzahl richtig / Anzahl falsch	137	63	141	59
Chi²-Wert	0,189			
Zweiseitige Signifikanz	0,664 – nicht signifikant			

	dynamisch		Abfolge verschiedener „Bilder“	
Aufgaben	1 - 4		5 - 8	
einzelne Prozentwerte / Durchschnitt (in %)	90, 60, 78, 46	68,5	56, 42, 78, 58	58,5
Anzahl richtig / Anzahl falsch	137	63	117	83
Chi²-Wert	4,315			
Zweiseitige Signifikanz	0,038* – signifikant			

	statisch		Abfolge verschiedener „Bilder“	
Aufgaben	9 - 12		5 - 8	
einzelne Prozentwerte / Durchschnitt (in %)	62, 60, 78, 82	70,5	56, 42, 78, 58	58,5
Anzahl richtig / Anzahl falsch	141	59	117	83
Chi²-Wert	6,289			
Zweiseitige Signifikanz	0,012* – signifikant			

	Subtrahend sichtbar		Subtrahend nicht sichtbar	
Aufgaben	1, 2, 5, 6, 9, 10, 11, 12		3, 4, 7, 8	
einzelne Prozentwerte / Durchschnitt (in %)	90, 60, 56, 42, 62, 60, 78, 82	66,25	78, 46, 78, 58	65
Anzahl richtig / Anzahl falsch	265	135	130	70
Chi²-Wert	0,093			
Zweiseitige Signifikanz	0,761 – nicht signifikant			

Farbgebung

	einfarbig		zweifarbig	
Aufgaben	1, 3, 5, 7, 11		2, 4, 6, 8, 9, 10, 12	
einzelne Prozentwerte / Durchschnitt (in %)	90, 78, 56, 78, 78	76	60, 46, 42, 58, 62, 60, 82	58,57
Anzahl richtig / Anzahl falsch	190	60	205	145
Chi²-Wert	19,694			
Zweiseitige Signifikanz	< 0,001*** – sehr signifikant			

räumliche Anordnung

	Blockanordnung		lineare Anordnung	
Aufgaben	1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12		2, 6, 10, 11	
einzelne Prozentwerte / Durchschnitt (in %)	90, 78, 46, 56, 78, 58, 62, 82	68,75	60, 42, 60, 78	60
Anzahl richtig / Anzahl falsch	275	125	120	80
Chi²-Wert	4,538			
Zweiseitige Signifikanz	0,033* – signifikant			

	räumlich versetzt		räumlich nicht versetzt	
Aufgaben	11, 12		9, 10	
einzelne Prozentwerte / Durchschnitt (in %)	78, 82	80	62, 60	61
Anzahl richtig / Anzahl falsch	80	20	61	39
Chi²-Wert	8,679			
Zweiseitige Signifikanz	0,003** – sehr signifikant			

Versicherung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit von mir selbstständig angefertigt, nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt und alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken gegebenenfalls auch elektronischen Medien entnommen sind, durch Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht wurden. Entlehnungen aus dem Internet sind durch einen datierten Ausdruck belegt.

Reutlingen, den ………………………… …………………………………………...

Unterschrift